SUR LES THÉORÈMES GÉNÉRAUX DE LA MÉCANIQUE ET LE CALCUL VECTORIEL

l'on conteste la légitimité de ce langage je répondrai : Toutes nos affirmations sont de même espèce, même les plus simples et les plus vulgaires. Je n'insisterai pas là dessus, celà m'entraînerait trop loin.

J. RICHARD (Dijon).

SUR LES THÉORÈMES GÉNÉRAUX DE LA MÉCANIQUE ET LE CALCUL VECTORIEL

L'enseignement de la mécanique débute généralement aujourd'hui par une théorie des vecteurs dont la statique n'est plus ensuite qu'une application. Il y aurait avantage, semble-t-il, à opérer de même pour la dynamique en dégageant la nature purement géométrique de certains théorèmes.

La définition habituelle de la dérivée d'un vecteur lui suppose une origine fixe ; elle se généralise facilement lorsque l'origine est variable. Soit le vecteur I appliqué au point A, tous deux étant fonction du paramètre λ ; pour une variation $d\lambda$, A et I deviennent A' et I' : nous appellerons différentielle du vecteur donné le système formé par A', I' et par I changé de sens, appliqué en A.

En coordonnées cartésiennes soit I (X, Y, Z) appliqué en A (xyz) ; sa différentielle sera le système :

$$\left\{\begin{array}{llllll} X + dX & Y + dY & Z + dZ & \text{appliqué en } x + dx\,, & y + dy\,, & z + dz \\ -X & -Y & -Z & \quad\text{»} \qquad\quad x\,, & y\,, & z \end{array}\right.$$

Ses éléments de réduction par rapport à A en négligeant les termes de second ordre

Résultante	$dX\,,\ dY\,,\ dZ$
Moment	$Xdy - Ydx\,,\ Ydz - Zdy\,,\ Zdx - Xdz$

La définition de la dérivée résulte immédiatement de ces formules ; on voit qu'elle se compose outre la dérivée hodographique ordinaire d'un couple dont la signification géométrique est évidente.

Si au lieu d'un seul vecteur nous en considérons un système, sa dérivée sera constituée par l'ensemble des dérivées de chaque vecteur. Soient X_0, Y_0, Z_0 et L_0, M_0, N_0 les coordonnées du système à un moment donné. Celles de sa différentielle seront

$$X_1 = \Sigma(X + dX) + \Sigma(-X) = dx_0 , \qquad Y_1 = dY_0 , \qquad Z_1 = dZ_0 .$$

D'une façon analogue pour le couple

$$L_1 = dL_0 , \qquad M_1 = dM_0 , \qquad N_1 = dN_0 .$$

Passant ensuite à la dérivée on pourra énoncer le théorème fondamental :

Les coordonnées du système dérivé sont les dérivées des coordonnées du système primitif. Un cas particulier intéressant est celui où le couple envisagé précédemment est nul

$$X dy - Y dx = Y dz - Z dy = Z dx - X dz = 0 .$$

Il faut que A soit un point fixe ou que

$$\frac{dx}{X} = \frac{dy}{Y} = \frac{dz}{Z} ,$$

c'est-à-dire que le vecteur doit être dirigé suivant la tangente à la courbe décrite par A. Ceci se présente pour la vitesse d'un point mobile dont l'accélération est la dérivée au sens le plus général.

Etant donné un système formé par de pareils vecteurs qu'on peut appeler tangentiels, si par des points arbitraires fixes on leur mène des vecteurs égaux, on obtient un deuxième système dont la dérivée est identique à celle du premier et se réduit, du reste, à une résultante unique ; c'est là le principe des hodographes.

Il est aisé de voir que les théorèmes généraux de la Mécanique sont contenus dans le précédent. Dans un ensemble de points mobiles les forces appliquées à chaque point constituent le système dérivé des quantités de mouvements. La relation

$$X_1 = \frac{dX_0}{d\lambda}\ , \qquad Y_1 = \frac{dY_0}{d\lambda}\ , \qquad Z_1 = \frac{dZ_0}{d\lambda}\ ,$$

n'est autre que le théorème des quantités de mouvement projeté ; et :

$$L_1 = \frac{dL_0}{d\lambda}\ , \qquad M_1 = \frac{dM_0}{d\lambda}\ , \qquad N_1 = \frac{dN_0}{d\lambda}\ ,$$

celui des moments des quantités de mouvement.

Si on remarque que X_0 est la vitesse V_x du centre de gravité multipliée par la masse totale Σm, l'une des relations précédentes :

$$X_1 = \frac{dX_0}{d\lambda} = \Sigma m \,.\, \frac{dV_x}{d\lambda}$$

exprime que la résultante générale des forces, X_1, est la dérivée de la quantité de mouvement du centre de gravité qui aurait la masse Σm ; c'est le principe de la conservation de son mouvement.

Quant au théorème des forces vives, un calcul très simple montrera qu'il revient à exprimer la condition nécessaire et suffisante pour que la quantité de mouvement soit un vecteur tangentiel, jointe à ce que son module est égal à $m\,\frac{ds}{dt}$.

Georges MONNET (Lyon).