Zeitschrift: L'Enseignement Mathématique
Herausgeber: Commission Internationale de l'Enseignement Mathématique
Band: 7 (1905)
Heft: 1: L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE

Artikel: SUR LES FONDEMENTS DE LA LOGIQUE ET DE L'ARITHMÉTIQUE
Autor: Hilbert, D.
DOI: https://doi.org/10.5169/seals-8424

Nutzungsbedingungen
Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Mehr erfahren

Conditions d'utilisation
L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. En savoir plus

Terms of use
The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. Find out more

Download PDF: 01.07.2025

ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, https://www.e-periodica.ch

SUR LES FONDEMENTS DE LA LOGIQUE ET DE L'ARITHMÉTIQUE [1]

Si dans la recherche des fondements de la Géométrie nous sommes aujourd'hui d'accord, quant à l'essentiel, sur les voies à prendre et les buts à poursuivre, on ne saurait en dire autant des fondements de l'Arithmétique : ici les opinions les plus différentes se dressent encore en face les unes des autres.

Effectivement, lorsqu'on passe de la Géométrie à l'Arithmétique, on rencontre des difficultés qui sont en partie d'une espèce nouvelle. Dans l'analyse des fondements de la Géométrie on peut laisser de côté certaines difficultés, de nature purement arithmétique ; mais dès qu'il s'agit de fonder l'Arithmétique, il semble qu'on n'a pas le droit de s'appuyer sur une autre discipline. Pour mettre clairement en évidence les difficultés fondamentales qui se présentent, je ne saurais mieux faire que de soumettre à une brève revue critique les points de vue adoptés par divers savants.

L. Kronecker voyait, comme on sait, dans le concept de nombre entier le fondement propre de l'Arithmétique. Il considérait le nombre entier, en tant que concept général (valeur paramétrique) comme directement et immédiatement donné ; ce qui l'empêcha d'apercevoir que le concept de nombre entier doit, cependant, et peut être fondé. A cet égard, Kronecker est un *dogmatique*. Il reçoit comme un dogme le nombre entier doté de ses propriétés fondamentales et il ne cherche pas à remonter plus arrière.

H. Helmholtz représente le point de vue *empiriste*. Mais

[1] Communication faite par M. D. Hilbert (Göttingue), au IIIme Congrès international des mathématiciens, à Heidelberg, le 12 août 1904 ; traduction de M. P. Boutroux (Paris).

toute tentative d'explication empirique me paraît échouer devant ce fait que jamais l'expérience ne saurait rien nous apprendre relativement à l'existence possible ou actuelle d'un nombre arbitrairement grand. Le nombre des choses qui sont objets de notre expérience reste en effet toujours, quelque grand qu'il soit, inférieur à une limite finie.

E.-B. Christoffel et quelques autres adversaires de Kronecker ont eu le juste sentiment que le concept de nombre irrationnel est nécessaire à l'Analyse, si l'on ne veut pas qu'elle soit tout entière frappée de stérilité ; dès lors, soit en s'efforçant de déterminer des caractères « positifs » de ce concept, soit par d'autres moyens analogues, ils ont tâché de sauvegarder le nombre irrationnel. Ce sont, à cet égard, des *opportunistes*. Ils n'ont toutefois pas réussi, selon moi, à ruiner radicalement le point de vue de Kronecker.

Parmi les savants qui ont pénétré plus avant dans l'essence du nombre entier, je citerai les suivants :

G. Frege se propose de fonder les lois de l'Arithmétique en s'appuyant sur la Logique (au sens usuel du mot). Il a eu le mérite de discerner les propriétés essentielles du concept de nombre entier, comme aussi la signification du principe de l'induction complète. Mais sa doctrine soulève quelques difficultés. Fidèle à son plan, il admet, entr'autres principes, qu'un concept (un ensemble) se trouve défini et immédiatement utilisable dès que l'on sait dire d'un objet quelconque s'il rentre ou ne rentre pas dans cet ensemble (le concept de « quelconque », lui non plus, n'est pas autrement déterminé). Mais alors Frege se trouve désarmé devant les paradoxes de la théorie des Ensembles, paradoxes dont la considération de l'Ensemble de tous les Ensembles nous fournit un exemple et qui établissent, selon moi, que les notions et les méthodes de la logique usuelle n'ont pas encore la précision et la rigueur réclamées par la théorie des Ensembles. *Or, ce devrait être, au contraire, l'un des objets principaux poursuivis, de prime abord, par celui qui étudie le concept de nombre, que d'échapper à ces contradictions et d'éclaircir ces paradoxes.*

R. Dedekind a clairement reconnu les difficultés d'ordre

mathématique que l'on rencontre lorsqu'on cherche à fondre le concept de nombre et, le premier, avec une rare pénétration, il a construit une théorie des nombres entiers. Je qualifierai, cependant, sa méthode de *transcendantale,* car, voulant prouver l'existence de l'Infini, Dedekind s'engage dans un raisonnement qui repose sur des idées métaphysiques comme en invoquent souvent les philosophes. C'est là une voie que je ne saurais regarder comme praticable, ni comme sûre; car elle nous accule à une contradiction insurmontable en faisant appel au concept de « l'ensemble de tous les objets ».

G. Cantor a bien senti cette contradiction, et c'est ce qui l'a conduit à établir une distinction entre les Ensembles « consistants » et les Ensembles « non-consistants ». Mais il ne me paraît pas avoir fondé cette distinction sur un criterium suffisamment précis. Force m'est donc de déclarer que sur ce point, le point de vue de M. Cantor laisse encore place à l'appréciation *subjective* et qu'il ne saurait nous fournir une certitude objective.

J'estime, pour ma part, que toutes les difficultés ainsi soulevées sont surmontables et que l'on peut fonder le concept de nombre d'une manière parfaitement rigoureuse et satisfaisante. La méthode que j'emploie à cet effet est une méthode *axiomatique* dont je voudrais brièvement faire connaître le principe.

On regarde d'ordinaire l'Arithmétique comme une partie de la Logique et, lorsqu'on cherche à fonder cette science, on prend généralement pour point de départ les notions reçues dans la Logique usuelle. Cependant, si nous y regardons de près, nous constatons que dans les principes logiques, tels que l'on a coutume de les présenter, se trouvent impliquées déjà certaines notions arithmétiques, par exemple la notion d'Ensemble et, dans une certaine mesure, la notion de Nombre. Ainsi, nous nous trouvons pris dans un cercle, et c'est pourquoi, afin d'éviter tout paradoxe, il me paraît nécessaire de développer simultanément les principes de la Logique et ceux de l'Arithmétique.

Comment je me représente ce développement simultané,

je ne puis que l'esquisser dans ces quelques pages. Que l'on veuille bien m'excuser si je me borne à indiquer sommairement dans quelle direction j'ai poursuivi mes recherches. Encore, afin d'être plus facilement compris, ferai-je usage de la langue ordinaire ainsi que des lois logiques qui y sont impliquées; il faudrait procéder autrement si l'on voulait rendre parfaitement rigoureuse la construction synthétique qui va suivre.

Soit un objet de notre pensée que nous appellerons d'un seul mot : *Objet*. Nous le représenterons par un signe.

Prenons tout d'abord en considération l'Objet 1 (*un*). Les groupes formés avec cet Objet, deux, trois ou plusieurs fois répété, c'est-à-dire les groupes tels que :

$$11, \quad 111, \quad 1111,$$

sont appelés *Combinaisons* de l'Objet 1 avec lui-même. De même, toute combinaison de ces Combinaisons, par exemple :

$$(1)\,(11), \quad (11)\,(11)\,(11), \quad \big((11)\,(11)\big)\,(11), \quad \big((111)\,(1)\big)\,(1),$$

est également une Combinaison de l'Objet 1 avec lui-même. Les Combinaisons seront à leur tour regardées comme des Objets ; afin de distinguer l'Objet initial 1, nous l'appellerons *Objet simple*.

Donnons-nous maintenant, avec 1, un second Objet simple que nous représenterons par le signe $=$, et considérons les Combinaisons formées avec nos deux Objets, par exemple :

$$1=, \; 11=, \; (1)\,(=1)\,(===), \; \big((11)\,(1)\,(=)\big)\,(==), \; 1=1, \; (11)=(1)\,(1).$$

Nous dirons que la Combinaison a des Objets simples 1, $=$ *diffère* de la Combinaison b, si ces deux Combinaisons se distinguent de quelque manière (ne sont pas *identiques*), soit que l'ordre et l'arrangement de leurs termes soient différents, soit que les Objets 1 et $=$ n'y entrent pas de la même manière.

Cela posé, imaginons que les Objets 1 et $=$ et leurs Combinaisons soient, par un procédé quelconque, répartis entre

deux classes, la *classe des êtres* et la *classe des non-êtres*. Un Objet quelconque appartenant à la classe des êtres diffère d'un Objet quelconque appartenant à la classe des non-êtres. Toute Combinaison des deux Objets simples 1, = appartient à l'une ou à l'autre des deux classes.

Soit $\bar{a}$ une Combinaison des deux Objets fondamentaux 1 et = : nous désignerons également par a la *Proposition* affirmant que a appartient à la classe des êtres, et nous représenterons par $\bar{a}$ la *Proposition* affirmant que a appartient à la classe des non-êtres. Nous dirons que a est une Proposition *exacte*, si a appartient effectivement à la classe des êtres; de même $\bar{a}$ sera une Proposition *exacte*, si $\bar{a}$ appartient à la classe des non-êtres. Les Propositions a et $\bar{a}$ sont *contradictoires* entre elles.

L'ensemble de deux propositions A, B, que l'on représente par le symbole

$$A \mid B,$$

et qui s'énonce : « A entraîne B » ou « Si A est exact, B est exact », est à son tour une Proposition, dans laquelle A est la *prémisse* et B la *conclusion*. La prémisse et la conclusion peuvent elles-mêmes comprendre plusieurs Propositions, telles que A_1, A_2... ou B_1, B_2, B_3...; l'on a alors, par exemple :

$$A_1 \text{ et } A_2 \mid B_1 \text{ ou } B_2 \text{ ou } B_3$$

ce qui s'énonce : « A_1 et A_2 entraînent B_1, ou B_2, ou B_3 ».

L'emploi du symbole o. (*ou*) nous permettrait, puisque la négation a été également introduite, de nous passer du symbole | . Si je continue à faire usage de ce symbole, c'est uniquement afin de me rapprocher le plus possible du langage courant.

Par A_1, A_2,... nous désignerons les Propositions que l'on obtient en substituant à l'*indéterminée* x, dans une même Proposition A (x), les Objets 1, = et leurs diverses Combinaisons. Les Propositions

$$A_1 \text{ ou } A_2 \text{ ou } A_3, \ldots \qquad A_1 \text{ et } A_2 \text{ et } A_3, \ldots$$

seront aussi respectivement désignées par les symboles :

A $(x^{(o)})$, c'est-à-dire « au moins pour *un* x » ;
A $(x^{(u)})$, c'est-à-dire « pour un x *quelconque* » ;

c'est là une simple abréviation d'écriture.

Cela posé, avec les deux objets 1, $=$ que nous nous sommes donnés, nous formons les Propositions suivantes :

$$(1) \qquad x = x$$
$$(2) \qquad \{ x = y \text{ et } w(x) \} \mid w(y) .$$

Dans ces Propositions, x (mis pour $x^{(u)}$), représente l'un des deux Objets fondamentaux ou l'une quelconque de leurs Combinaisons. Dans (2), y (c'est-à-dire $y^{(u)}$) représente également l'un de ces deux Objets ou l'une de leurs Combinaisons, et $w(x)$ est une Combinaison arbitraire formée avec l'*indéterminée* x, (c'est-à-dire $x^{(u)}$). La Proposition (2) s'énonce en ces termes : Si l'on a $x = y$ et $w(x)$, on aura $w(y)$.

Les Propositions (1) et (2) constituent la *Définition du concept* $=$ (*égal*), et sont pour cette raison appelées *Axiomes*.

Lorsque dans les Axiomes (1) et (2) on substitue aux indéterminées x et y les Objets simples 1 et $=$ ou certaines de leurs Combinaisons, on obtient des Propositions que nous appellerons *Propositions déduites des Axiomes*. Soit une série de Propositions supposée telle que la dernière Proposition ait des prémisses identiques aux conclusions des précédentes : si nous prenons comme prémisse les prémisses des Propositions initiales et comme conclusion la conclusion de la Proposition finale, nous obtenons une nouvelle Proposition qui sera également considérée comme *Proposition déduite des Axiomes*. L'emploi répété du même procédé nous permettra toujours d'obtenir des Propositions nouvelles.

Parmi ces Propositions je choisis celles qui ont la forme d'une Proposition simple a (sans prémisse), et je les situe dans la classe des êtres ; je laisse de côté tous les autres Objets, lesquels pourront appartenir à la classe des non-êtres. Nous voyons que de (1) et (2) on ne pourra tirer que des Propositions de la forme $\alpha = \alpha$, où α est une Combinaison des

Objets 1 et =. Les Axiomes (1) et (2) doivent donc être considérés comme vrais relativement à la répartition adoptée entre la classe des êtres et celle des non-êtres; je veux dire que ces Axiomes sont des « Propositions exactes ». En conséquence, nous regarderons le concept de l'égalité, que définissent ces Axiomes, comme un concept *exempt* de *contradiction*.

Il est bon de remarquer à ce propos que dans les Axiomes (1) et (2) ne sauraient en aucun cas figurer des Propositions de la forme $\bar{a}$, c'est-à-dire des Propositions affirmant que telle ou telle Combinaison appartient à la classe des non-êtres. Nous pourrions donc satisfaire à ces deux Axiomes lors même que nous rangerions dans la classe des êtres toutes les Combinaisons des deux Objets simples 1 et =, et laisserions vide la classe des non-êtres. La répartition adoptée plus haut est cependant préférable, car elle montre comment on devra procéder lorsqu'on sera en présence de cas plus difficiles.

Nous allons maintenant poursuivre notre reconstruction logique de la pensée mathématique en adjoignant aux deux Objets 1 et = trois nouveaux Objets représentés par les symboles suivants : u signifiant « infini » ou « ensemble infini », f signifiant « conséquent », et f' signifiant « opération correspondante ». Nous poserons relativement à ces Objets trois nouveaux Axiomes :

$$(3) \quad f(ux) = u(f'x)$$

$$(4) \quad f(ux) = f(uy) \mid ux = uy$$

$$(5) \quad \overline{f(ux) = u1}$$

Dans ces Axiomes, l'indéterminée x (au sens de $x^{(u)}$) représente l'un quelconque des cinq Objets fondamentaux dont nous disposons maintenant, ou l'une quelconque de leurs Combinaisons. Donnons au symbole u le nom d'*Ensemble infini*, et appelons *élément* de cet Ensemble u la Combinaison ux (par exemple, $u1$, ou $u(11)$, ou uf). Alors l'Axiome (3) signifie que tout élément ux admet comme conséquent un Objet déterminé $f(ux)$, lequel est lui-même un élément de l'Ensemble u et est représenté par $u(f'x)$. L'Axiome (4) ex-

prime ce fait que si deux éléments de l'Ensemble u ont le même conséquent, ces deux éléments sont égaux entre eux. L'Axiome (5) nous apprend que l'élément $u1$ n'a pas de conséquent : l'élément $u1$ sera dès lors considéré comme étant le *premier* élément de u.

Cela posé, les nouveaux Axiomes doivent être soumis au même examen que tout à l'heure les Axiomes (1) et (2). Ces deux premiers Axiomes, eux aussi, doivent être éprouvés à nouveau, puisque nous avons accru leur extension en désignant désormais par x et y les Combinaisons formées avec cinq Objets simples au lieu de deux.

Demandons-nous donc s'il peut y avoir contradiction entre Propositions déduites des Axiomes (1),... (5), ou si l'on réussira au contraire à répartir de telle manière (entre les classes des êtres et des non-êtres) les cinq Objets fondamentaux et leurs Combinaisons, que toute Proposition déduite des cinq Axiomes soit une « Proposition exacte » relativement à la répartition adoptée. Pour répondre à cette question, nous remarquerons que l'Axiome (5) est le seul qui ait la forme $\bar{a}$, c'est-à-dire le seul Axiome affirmant qu'une certaine Combinaison appartient à la classe des non-êtres. Une Proposition contredisant cet Axiome devrait donc être de la forme

$$(6) \qquad f(ux^{(0)}) = u1$$

Or, je vais montrer qu'on ne saurait déduire des Axiomes (1).., (4) aucune Proposition de cette forme.

Je donnerai le nom d'égalité homogène (par égalité j'entends une Combinaison de la forme $a = b$) à toute égalité dans laquelle les deux membres a et b sont composés du même nombre d'Objets simples (deux, trois, quatre Objets simples, ou davantage). Par exemple, les égalités

$$(11) = (fu)\,, \qquad (ff) = (uf')\,, \qquad (f\,11) = (u\,1\,=)\,,$$
$$(f\,1)\,(f\,1) = (1111)\,, \qquad (f\,(ff'u)) = (1\,uu\,1)$$

sont des égalités homogènes. Des Axiomes (1) et (2) on ne saurait tirer, ainsi que nous l'avons déjà remarqué, que des égalités de la forme $\alpha = \alpha$, c'est-à-dire des égalités homo-

gènes. De même l'Axiome (3), lorsqu'on y remplace x par un Objet quelconque, ne donne que des égalités homogènes. Et il en est encore ainsi de l'Axiome (4), à condition que la prémisse de cet Axiome soit elle-même une égalité homogène. Ainsi toute Proposition déduite des Axiomes (1),..., (4) est une égalité homogène. Au contraire l'égalité (6), qui seule pourrait contredire l'Axiome (5), n'est pas homogène, puisque l'on doit y remplacer x par une certaine Combinaison, en sorte que le côté gauche est une Combinaison de trois Objets simples au moins, tandis qu'au côté droit ne figurent jamais que les deux Objets simples u et 1.

Tel est le principe de la méthode qui me permet de démontrer la légitimité des Axiomes (1),..., (5). Pour donner une démonstration complète, il faudrait faire appel au concept de nombre ordinal fini et établir quelques propositions sur le concept d'égalité numérique (appliqué aux deux membres d'une égalité); au point où nous en sommes, nous n'aurions pas de difficulté à obtenir ces propositions. Il faudrait également, pour être complet, tenir compte de certaines considérations sur lesquelles je reviendrai à la fin de cet article (voir V).

Nous sommes ainsi conduits au résultat suivant : On obtient une répartition satisfaisant aux conditions voulues si l'on range dans la classe des êtres tous les Objets a qui sont des Propositions déduites des Axiomes (1),..., (4), et dans la classe des non-êtres tous les autres Objets, en particulier les Objets de la forme $f(ux) = u1$. Les cinq Axiomes posés plus haut jouissent, en conséquence, de cette propriété qu'ils ne sauraient conduire à aucune contradiction. C'est pourquoi les Objets définis par ces axiomes seront considérés comme des concepts ou opérations *exempts de contradiction ;* ils seront regardés comme *existant*. En particulier, par la méthode qui vient d'être exposée, l'affirmation de l'*existence de l'Infini u* se trouve légitimée ; car elle acquiert une signification définie et un contenu auquel nous pourrons nous tenir désormais.

Les considérations que je viens d'esquisser sont le premier exemple d'une démonstration directe établissant qu'il n'y a pas contradiction entre différents Axiomes. La démonstration

directe s'imposait ici, puisqu'il était interdit de recourir à la méthode ordinaire — employée principalement en Géométrie — laquelle consiste à considérer des cas particuliers convenablement choisis, et à former des exemples.

Le succès de la démonstration directe tient ici principalement à cette circonstance que nous n'avons à considérer qu'une seule Proposition de la forme $\bar{a}$ (Proposition affirmant qu'une certaine Combinaison appartient à la classe des non-êtres) : c'est à savoir la Proposition qui figure dans l'Axiome (5).

Nous pouvons maintenant poursuivre notre synthèse. Exprimant toujours dans le même langage les Axiomes bien connus relatifs à l'Induction complète, nous constatons que ces Axiomes peuvent être, sans contradiction, adjoints aux précédents; ce qui établit que l'*Existence du plus petit Infini*[1] (c'est-à-dire du *type ordinal* défini par la suite 1, 2, 3...) est exempte de contradiction.

Il n'y a aucune difficulté à fonder le concept de nombre ordinal fini à l'aide des principes que nous avons posés. On s'appuiera pour cela sur l'Axiome suivant : Etant donné un Ensemble qui contient le premier élément du nombre ordinal, et qui, au cas où il en contient un élément (quelconque), contient aussi l'élément suivant, cet Ensemble contient nécessairement le dernier élément du nombre ordinal. Que cet axiome peut être sans contradiction adjoint aux précédents, la considération d'un exemple (soit du nombre *deux*) le montrera facilement. Il faudra montrer ensuite qu'il est possible d'ordonner les éléments du nombre ordinal fini de telle manière que tout Ensemble partiel formé avec ces éléments ait un premier et un dernier élément. Nous établirons ce point en définissant un nouvel objet $<$ au moyen de l'Axiome

$$(x < y \text{ et } y < z) \mid x < z ,$$

et en montrant que cet Axiome peut, sans contradiction, être joint aux précédents, lorsque x, y, z désignent des éléments

[1] Voir la communication que j'ai présentée au IIe Congrès International des Mathématiciens, Paris, 1900 : *Problèmes mathématiques.* 2° *De la non-contradiction des Axiomes de l'Arithmétique.*

quelconques du nombre ordinal fini. Après quoi nous pourrons prouver, en nous appuyant sur l'existence du plus petit infini, qu'étant donné un nombre ordinal fini quelconque, il existe un nombre ordinal qui lui est supérieur.

J'énoncerai maintenant brièvement les principes que nous devrons prendre pour guides si nous poursuivons la reconstruction des lois de la pensée mathématique selon le point de vue que j'ai adopté.

I. Supposons que l'on soit arrivé à un stade déterminé de l'évolution de la théorie : la condition nécessaire et suffisante pour qu'une Proposition nouvelle soit considérée comme exacte est que, si on l'adjoint en tant qu'Axiome aux Propositions déjà reconnues exactes, on ne rencontre pas de contradiction. En d'autres termes, l'adjonction du nouvel Axiome doit conduire à des Propositions qui ne soient pas en contradiction avec la répartition de l'ensemble des Objets entre la classe des êtres et celle des non-êtres.

II. Les indéterminées qui figurent dans les Axiomes — en place du « quelconque » ou du « tous » de la logique ordinaire — représentent exclusivement l'ensemble des Objets et des Combinaisons qui nous sont déjà acquis en l'état actuel de la théorie, ou que nous sommes en train d'introduire. Lors donc qu'on déduira des Propositions des Axiomes considérés, ce sont ces Objets et ces Combinaisons seules que l'on sera en droit de substituer aux indéterminées. Il ne faudra pas non plus oublier que, lorsque nous augmentons le nombre des Objets fondamentaux, les Axiomes acquièrent du même coup une extension nouvelle et doivent, par suite, être de nouveau mis à l'épreuve et au besoin modifiés.

III. Nous avons défini l'Ensemble en général, en le considérant comme étant un Objet de la pensée, m. Les éléments de l'Ensemble sont les combinaisons mx ; en sorte que, contrairement à l'usage établi, nous regardons la notion d'Elément comme postérieure à la notion d'Ensemble.

Comme on a procédé avec la notion d' « Ensemble », on procédera avec les notions de « correspondance », de « transformation », d' « association », de « fonction ». On les regardera comme des Objets au sujet desquels on posera certains

Axiomes appropriés : si l'on ne rencontre pas d'impossibilité en cherchant à répartir les Combinaisons de ces Objets entre la classe des êtres et celle des non-êtres, on sera en droit de considérer les notions correspondantes comme « existant sans contradiction ».

Le Principe I est le principe fécond et créateur qui nous donne pleine liberté pour créer de nouveaux concepts, à la seule condition que nous évitions la contradiction. Les Principes II et III permettent d'échapper aux Paradoxes mentionnés au début de cet article, et de triompher, en particulier, du Paradoxe relatif à l'Ensemble constitué par tous les Ensembles qui ne se contiennent pas eux-mêmes comme élément.

Afin de montrer que la notion définie dans III ne cesserait pas, dans une théorie plus complète, de coïncider avec la notion usuelle d'Ensemble, j'établirai le théorème suivant :

A un stade déterminé de l'évolution de la théorie, soient $1, .., \alpha, .., k$ les Objets dont nous disposons, et soit $a(\xi)$ une Combinaison de ces Objets, laquelle renferme une indéterminée ξ. Soit de plus $a(\alpha)$ une « Proposition exacte » (ce qui veut dire que $a(\alpha)$ appartient à la classe des êtres). Alors il existe sûrement un Objet m tel que $a(mx)$ soit, quel que soit x, une Proposition exacte (c'est-à-dire que $a(mx)$ appartienne, pour un x quelconque, à la classe des êtres), et tel que, réciproquement, tout Objet ξ pour lequel la Proposition $a(\xi)$ est exacte, soit égal à une Combinaison $mx^{(o)}$. [En disant que ξ est égal à $mx^{(o)}$, j'entends que la Proposition

$$\xi = mx^{(o)}$$

est exacte, en d'autres termes que les Objets ξ pour lesquels $a(\xi)$ est une Proposition exacte sont, selon la définition donnée plus haut, les éléments d'un Ensemble m.]

Pour démontrer ce théorème, nous procéderons comme il suit :

Nous poserons d'abord ce nouvel Axiome : « L'Objet m est tel que les deux Propositions

$$(7) \qquad a(\xi) \mid m\xi = \xi$$

$$(8) \qquad \overline{a(\xi)} \mid m\xi = \alpha$$

soient exactes. En d'autres termes, si a (ξ) appartient à la classe des êtres, on aura, d'après le nouvel Axiome, $m\xi = \xi$; et, en cas contraire, on aura $m\xi = \alpha$. » Nous adjoindrons cet Axiome aux Axiomes antérieurement adoptés relativement aux Objets 1,.., α,., k, et nous imaginerons pour un instant que cette adjonction conduise à une contradiction ; autrement dit, nous supposerons que nous puissions déduire de nos divers Axiomes deux Propositions de la forme

$$p(m) \quad \text{et} \quad \overline{p(m)},$$

p (m) étant une certaine Combinaison des Objets 1,.., k, m.

Nous raisonnerons alors ainsi : Partout où, dans p (m), l'Objet m figure combiné avec un Objet ξ, appliquons les Axiomes (7) ou (8), en tenant compte de (2), et remplaçons ainsi $m\xi$, soit par ξ, soit par α. p (m) se transformera en q (m), et dans q (m) il n'y aura plus aucune Combinaison de la forme $m\xi$. Il en résulte que la Proposition q (m) aurait pu être déduite des Axiomes relatifs aux seuls Objets 1,.., α,., k, dont nous disposions avant d'introduire (7) et (8). Dès lors, elle restera exacte si nous substituons à m l'un quelconque de ces Objets, soit, par exemple, 1. Le même raisonnement s'applique à $\overline{p\ (m)}$. Notre hypothèse initiale conduit donc à cette conclusion qu'au stade de l'évolution de la théorie où l'on se trouvait avant l'introduction de m, on devait rencontrer une contradiction de la forme

$$q(1) \quad \text{et} \quad \overline{q(1)},$$

ce qui ne pouvait avoir lieu, puisque l'existence (sans contradiction) des Objets 1,.., k a été admise. Nous devons donc rejeter notre hypothèse et admettre l'existence (sans contradiction) de l'Objet m.

IV. Eprouver la validité d'un système donné d'Axiomes revient à effectuer la répartition des Objets correspondants entre la classe des êtres et la classe des non-êtres, en considérant les Axiomes comme des règles auxquelles la répartition doit satisfaire. La difficulté consiste alors à reconnaître la possibilité d'une telle répartition. La question posée équivaut encore à la suivante : les Propositions que l'on peut dé-

duire des Axiomes, lorsqu'on les spécialise ou qu'on les combine d'après la méthode exposée plus haut, peuvent-elles oui ou non conduire à une contradiction? Cela, lorsque l'on adjoint aux Axiomes les règles logiques classiques telles que

$$\{ (a \mid b) \text{ et } (\bar{a} \mid b) \} \mid b$$

$$\{ (a \text{ ou } b) \text{ et } (a \text{ ou } c) \} \mid \{ a \text{ ou } (b \text{ et } c) \}$$

Il y aura deux manières de prouver qu'un système donné d'Axiomes est exempt de contradiction. Ou bien l'on montrera que s'il y avait contradiction à un moment donné, cette contradiction devrait déjà s'être manifestée à un stade antérieur de la théorie. Ou bien, supposant qu'il existe une déduction permettant de tirer une certaine contradiction des Axiomes donnés, on établira qu'une telle déduction implique elle-même contradiction et est par suite irrecevable. C'est de cette dernière manière que nous avons prouvé l'existence (sans contradiction) de l'Infini : nous avons montré qu'il était impossible de déduire l'égalité (6) des Axiomes (1), (4).

V. Lorsque dans les pages précédentes il était question de *plusieurs* Objets ou Combinaisons, de *plusieurs* indéterminées, de Combinaisons *multiples*, ces mots s'appliquaient toujours à un nombre limité de choses. Après avoir défini le « nombre fini », nous sommes en état de leur donner le sens général qu'ils comportent. De même, en nous appuyant sur la définition du nombre fini, nous pourrons, conformément au Principe de l'Induction complète, définir explicitement à l'aide d'une méthode récurrente ce qu'il faut entendre par « Proposition déduite *quelconque* » ou par « Proposition *différant* de toutes les Propositions d'une certaine espèce ». En particulier, nous pourrons compléter la démonstration donnée plus haut, laquelle tendait à prouver que la Proposition $f(ux)^{(o)}) = u1$ diffère de toute Proposition qui se laisserait déduire des Axiomes (1),..., (4) à l'aide d'un nombre fini d'opérations. A cet effet, nous regarderons la démonstration elle-même comme une notion mathématique : c'est un Ensemble fini dont les éléments sont reliés par des Propositions, lesquelles affirment que la dite démonstration permet de con-

clure des Axiomes (1),..., (4) à la Proposition (6). Tout revient alors à montrer qu'une semblable démonstration implique contradiction et ne saurait par suite, selon nos conventions, être considérée comme existante.

Comme on a prouvé l'existence du plus petit Infini, on prouvera l'existence de l'ensemble des nombres réels : les Axiomes relatifs aux nombres réels (tels que je les ai énoncés ailleurs [1]), se laisseront, en effet, représenter par des formules analogues à celles qu'on a vues plus haut. La méthode s'appliquera en particulier à l'*Axiome des Systèmes Complets* (Vollständigkeitsaxiom), d'après lequel l'ensemble des nombres réels se trouve contenir (en ce sens qu'il existe entre les éléments des deux ensembles une correspondance univoque et réciproque) tout Ensemble dont les éléments satisfont aux mêmes Axiomes. Cet Axiome des Systèmes Complets pourra être exprimé par des formules du type défini plus haut, et, d'une manière générale, les Axiomes relatifs à l'ensemble des nombres réels ne se distinguent pas qualitativement des Axiomes invoqués pour la définition du nombre entier. C'est là le fait qui me paraît porter un coup décisif à la doctrine de Kronecker sur les fondements de l'Arithmétique, doctrine qu'au début de cet article je qualifiais de dogmatique.

En employant toujours la même méthode, on établira que les notions fondamentales de la théorie des Ensembles de Cantor, en particulier, la notion d'Alef doivent être considérées comme existant sans contradiction.

D. HILBERT (Göttingue).

---

[1] *Grundlagen der Geometrie*, 2e Ed., Leipzig, 1903, pp. 24-26.