

**Zeitschrift:** L'Enseignement Mathématique  
**Band:** 7 (1905)  
**Heft:** 1: L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE

**Artikel:** DÉFINITIONS ET DÉMONSTRATIONS MATHÉMATIQUES  
**Autor:** Couturat, Louis  
**DOI:** <https://doi.org/10.5169/seals-8425>

### **Nutzungsbedingungen**

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. [Siehe Rechtliche Hinweise.](#)

### **Conditions d'utilisation**

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. [Voir Informations légales.](#)

### **Terms of use**

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. [See Legal notice.](#)

**Download PDF:** 18.10.2024

**ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, <https://www.e-periodica.ch>**

# DÉFINITIONS ET DÉMONSTRATIONS

## MATHÉMATIQUES

---

Quand on demande si une notion est définissable ou si une proposition est démontrable, ces questions n'ont pas de sens, ou du moins elles sont indéterminées. Pour savoir si une notion est définissable, il faut savoir quelles sont les notions dont on dispose, soit comme indéfinissables, soit comme définies au moyen des indéfinissables. De même, pour savoir si une proposition est démontrable, il faut savoir quelles sont les propositions qu'on possède, soit qu'on les ait admises comme indémonstrables, soit qu'on les ait démontrées au moyen des propositions premières. Ainsi une notion n'est définissable, une proposition n'est démontrable, que par rapport à un certain ordre assigné aux notions et aux propositions, et, en définitive, par rapport à un certain système de notions premières ou de propositions premières<sup>1</sup>. Une notion pourra être définissable, une proposition pourra être démontrable dans tel système, et ne pas l'être dans tel autre. Ainsi les propriétés d'*indéfinissable* et d'*indémontrable* ne sont pas intrinsèques et absolues, mais essentiellement relatives. On a donc le choix, théoriquement, entre une multitude de systèmes de notions premières et de propositions premières.

Quel système doit-on préférer? Le bon sens répond : celui où les notions premières sont les plus simples, et où les pro-

---

<sup>1</sup> Dans la logique symbolique, un symbole qu'on ne peut définir que d'une manière verbale (par des mots) est considéré comme indéfinissable. C'est que la traduction verbale qu'on en donne ne peut être qu'un nom équivalent (par exemple  $N =$  nombre entier) ou une paraphrase ; dans les deux cas, on ne peut pas réduire cette traduction en symboles, car, si on le pouvait, le symbole en question serait défini, et en fonction de nouveaux symboles qui, eux, seraient indéfinissables. Les traductions verbales des symboles non définis ne font qu'en donner une *interprétation* ; elles ne font pas partie de la théorie, comme les définitions symboliques.

positions premières sont les plus évidentes. Mais il n'y a pas de criterium logique de la simplicité des notions et de l'évidence des propositions. Pour pouvoir déterminer absolument les notions les plus simples, il faudrait que toutes les notions fussent composées d'une manière univoque de quelques-unes d'entre elles, comme les nombres entiers sont tous composés (et chacun d'une seule manière) de nombres premiers<sup>1</sup>. Mais il n'en est pas du tout ainsi, et, dans une certaine mesure, les notions simples peuvent se définir les unes par les autres. De même, pour pouvoir apprécier l'évidence des propositions autrement que par un sentiment tout subjectif, et par suite sujet à caution (car il peut être le produit de l'habitude), il faudrait que toutes les propositions fussent des conséquences de quelques-unes d'entre elles, bien déterminées, et c'est ce qui n'a pas lieu. Les notions premières et les propositions premières se relient et s'enchaînent, non dans un ordre linéaire (ramifié)<sup>2</sup>, mais dans un ordre circulaire, ou plutôt dans un réseau complexe où il n'y a ni premier ni dernier. C'est pourquoi on peut partir indifféremment d'un point ou d'un autre, c'est-à-dire choisir entre divers ordres également admissibles au point de vue logique.

Toutefois, à défaut de raisons strictement logiques, on peut avoir (et on a en général) des raisons méthodologiques de préférer tel ordre à tel autre. Ainsi, si la rigueur logique est satisfaite dès qu'on énumère explicitement toutes les notions premières et toutes les propositions premières dont on se sert pour définir et démontrer les autres, l'élégance logique demande que le nombre de ces notions et de ces propositions soit le plus petit possible ; elle demande aussi que ces notions et ces propositions soient, autant que possible, indépendantes entre elles (nous allons définir bientôt cette expression). Ce ne sont pas là des exigences absolues de la logique, comme l'indiquent les locutions mêmes : *le plus possible, autant que possible*. Ce sont simplement des desiderata d'ordre quasi esthétique, qui peuvent être *plus ou*

<sup>1</sup> Cette hypothèse, ou plutôt cette analogie, était le fondement (ruineux) de toute la logique de Leibniz. V. notre ouvrage sur *La logique de Leibniz*, chap. II.

<sup>2</sup> Analogie aux arbres généalogiques.

*moins* satisfaits sans que la valeur logique d'une théorie en soit affectée.

On dit que des notions sont *indépendantes entre elles*, quand aucune d'elles ne peut être définie au moyen des autres. On dit que des propositions sont *indépendantes entre elles*, quand aucune d'elles ne peut être démontrée au moyen des autres. Dans les mêmes cas, on dit que ces notions ou ces propositions forment un *système irréductible*. Il ne faut pas perdre de vue ce fait qu'une même théorie déductive peut être fondée sur plusieurs systèmes irréductibles de notions et propositions premières, de sorte que même cette condition peut ne pas suffire pour déterminer un système unique <sup>1</sup>.

Pour prouver que dans un système de propositions premières l'une d'elles est indépendante des autres, il ne suffit pas d'alléguer qu'*on n'a pas pu* démontrer cette proposition au moyen des autres; un tel argument n'a évidemment aucune valeur logique, parce qu'il est empirique et ne peut justifier une proposition universelle négative. Il faut (et il suffit) qu'on trouve un cas (un seul) où la proposition en question soit fausse alors que toutes les autres sont vraies; car ce cas exclut l'hypothèse que celles-ci impliquent celle-là. Or, puisque le sens des notions premières est indéterminé, il suffit de trouver une interprétation des symboles non définis, qui vérifie toutes les propositions premières, moins celle dont on veut prouver l'indépendance. D'où cette règle:

Pour qu'un système de propositions premières soit irréductible, il faut et il suffit qu'on puisse trouver pour chacune d'elles une interprétation du système des symboles non définis qui vérifie toutes les propositions premières sauf celle-là.

Dans ce cas, on dit qu'on a démontré l'*indépendance absolue* des propositions premières entre elles. Il arrive en effet qu'on puisse seulement démontrer leur *indépendance ordon-*

---

<sup>1</sup> Il est clair que si une même théorie peut être fondée sur deux systèmes irréductibles de postulats, chacun de ces systèmes doit pouvoir se déduire de l'autre, puisqu'il contient en tout cas des propositions (premières ou non) de la théorie. En d'autres termes, les deux systèmes doivent être logiquement équivalents (s'impliquer mutuellement). De même, si une théorie peut recevoir deux systèmes irréductibles de notions premières, chacun de ces deux systèmes doit pouvoir se définir au moyen de l'autre, puisque chacun d'eux permet de définir toutes les notions de la théorie qu'il ne contient pas.

née, c'est-à-dire que chacune d'elles est indépendante des précédentes. Cette démonstration a d'ailleurs lieu suivant la même méthode.

D'autre part, pour prouver que dans un système de notions premières l'une d'elles est indépendante des autres, il ne suffit évidemment pas d'alléguer qu'on n'a pas pu la définir au moyen des autres. Bien entendu, on doit considérer ces notions comme liées entre elles par un ensemble de postulats qui déterminent leurs relations; et quand on dit que l'une d'elles est indépendante des autres, il faut entendre que le système des postulats ne permet pas de la définir au moyen des autres. Par conséquent, ce système des postulats constitue une donnée du problème, et l'indépendance mutuelle des notions premières sera relative à ce système de postulats. Or, pour prouver qu'un symbole non défini est indépendant des autres, c'est-à-dire que son sens n'est pas déterminé par celui des autres, il suffit de trouver deux interprétations qui ne diffèrent que par le sens de ce symbole, *et qui vérifient toutes deux le système des postulats*, puisque ce système formule les conditions qui relient les unes aux autres les notions premières, et qui contribuent à déterminer (à limiter) leur sens. On aboutit ainsi à formuler la règle suivante :

Pour qu'un système de notions premières soit irréductible par rapport à un système de propositions premières, il faut et il suffit qu'on puisse trouver, pour chaque notion première, une seconde interprétation qui vérifie, comme la première, le système des propositions premières, toutes les autres notions conservant le même sens <sup>1</sup>.

\*  
\*   \*  
\*

Outre les définitions nominales, dont il a été question jus-

<sup>1</sup> A. PADOA, *Essai d'une théorie algébrique des nombres entiers, précédé d'une introduction logique à une théorie déductive quelconque*, ap. *Bibl. du Congrès de Philosophie*, 1900, t. III (Paris. A. Colin, 1901.) Cette méthode logique a été récemment appliquée par M. HUNTINGTON dans les mémoires suivants : *A complete set of postulates for the theory of absolute continuous magnitude*; *Complete sets of postulates for the theories of positive integral and positive rational numbers* (*Transactions of the American Mathematical Society*, t. III, 1902); *Two definitions of an Abelian group by sets of independent postulates* (*ibid.*, t. IV, 1903); *Sets of independent postulates for the Algebra of Logic* (*ibid.*, t. V, 1904); et par M. OSWALD VEBLEN : *A system of axioms for Geometry* (*ibid.*, t. V, 1904).

qu'ici, on a trouvé en Mathématiques deux autres espèces de définitions qui semblent irréductibles à cette forme, à savoir : les *définitions par postulats* et les *définitions par abstraction*<sup>1</sup>.

La *définition par postulats* s'applique, non à une seule notion, mais à un système de notions ; elle consiste à énumérer les relations fondamentales qui les unissent et qui permettent de démontrer toutes leurs autres propriétés : ces relations sont des postulats, c'est-à-dire les propositions premières d'une théorie. Or une telle définition n'est pas à proprement parler une définition, car elle suppose au contraire que les notions en question sont indéfinissables. Admettre que des postulats puissent *définir* les notions premières qui y figurent, c'est admettre que tout peut se définir ; car les notions définies seraient définies nominalement, et les notions non définies seraient définies par postulats. C'est donc là un abus du mot de *définition* ; tout ce qu'on peut dire, c'est que les postulats *déterminent* le sens des notions premières, au moins dans une certaine mesure ; car nous avons vu qu'en général ils ne le déterminent pas complètement, puisque le même système de postulats peut recevoir plusieurs interprétations.

S'il n'y avait qu'une seule notion à définir, on pourrait aisément transformer une définition par postulats en une définition nominale ; il suffirait de dire : « le terme à définir = un objet qui vérifie tels et tels postulats, » ce qui est toujours possible, au moyen du symbole :  $x \varepsilon (\dots)$ <sup>2</sup>. Mais quand il y a plusieurs notions à définir, il n'est pas possible, en général, de « résoudre » ainsi le système des postulats par rapport à ces notions, et d'en tirer leur « valeur » sous la

<sup>1</sup> C. BURALI-FORTI, *Logica matematica*, cap. IV, §§ 6, 7 (Milan, Hoepli, 1894) ; *Sur les différentes méthodes logiques pour la définition du nombre réel*, § 1, ap. *Bibliothèque du Congrès de Philosophie*, t. III (Paris, A. Colin, 1901).

<sup>2</sup> C'est ce qui a lieu, par exemple, pour l'idée de grandeur. M. BURALI-FORTI a commencé par la « définir » au moyen de huit postulats qui portent sur cette notion (*Formulaire de Mathématiques*, t. I, ch. IV [1895] ; *Les propriétés formelles des opérations algébriques*, ap. *Revue de Mathématiques*, t. VI, p. 141 [1900]) ; puis il a défini nominalement la grandeur, ou plus exactement, la *classe de grandeurs homogènes*, comme un ensemble d'objets qui vérifie ces huit postulats (*Sulla Teoria generale delle Grandezze e dei Numeri*, ap. *Atti dell' Accademia delle Scienze di Torino*, t. 39 [1904]). Cf. notre ouvrage *Les principes des mathématiques*, chap. V.

forme explicite de définitions nominales. Toutefois, il suffira de les définir toutes, sauf une, pour avoir la définition nominale de cette dernière ; car alors elle sera la seule, et l'on retombera dans le cas précédent. Les postulats deviendront de simples conséquences logiques de la définition, non pas que celle-ci puisse jamais être érigée en « vérité » ou en principe, mais parce que la notion définie vérifiera ces postulats *par définition*. C'est ainsi que l'on peut transformer les principes ou hypothèses d'une théorie en une définition de l'objet fondamental de cette théorie ; par exemple, les axiomes de la géométrie, ou plutôt d'une géométrie, en une définition de l'espace correspondant <sup>1</sup>.

La *définition par abstraction* s'applique à une fonction logique ou mathématique. Elle consiste, au lieu de définir nominalement cette fonction, à indiquer la condition nécessaire et suffisante à laquelle cette fonction prend la même valeur pour deux valeurs différentes de la variable <sup>2</sup>. Ce procédé est très fréquemment employé en mathématiques. Par exemple, beaucoup d'auteurs (M. Georg CANTOR) définissent le *nombre cardinal* comme suit : « Deux ensembles ont des nombres cardinaux égaux, quand on peut établir une correspondance univoque et réciproque entre tous leurs éléments. » De même, on ne définira pas le *vecteur*, mais on dira : « Deux vecteurs sont égaux, lorsqu'ils ont même longueur, même direction et même sens. » On ne définira pas la *direction*, mais on dira : « Deux droites ont la même direction, lorsqu'elles sont parallèles. » De même en physique : on ne définit pas nominalement la *masse*, la *température*, le *potentiel*, mais on indique dans quelles conditions « on dira » que deux corps ont la même masse, la même température, le même potentiel <sup>3</sup>. En général, toutes les fois qu'on peut établir entre deux objets d'une certaine classe une relation symétrique et

<sup>1</sup> V. *Les principes des mathématiques*, chap. VI, § B, fin.

<sup>2</sup> V. BURALI-FORTI, *Sur l'égalité et sur l'introduction des éléments dérivés dans la science*, ap. *L'enseignement mathématique*, 1899.

<sup>3</sup> Les définitions par abstraction sont si fréquentes, que certains auteurs, par une généralisation excessive, affirment qu'il n'y en a pas d'autres en mathématique. En quoi ils se trompent ; car on définit nominalement beaucoup de notions, comme celles de *nombre premier*, de *limite*, de *dérivée*, de *intégrale*, de *triangle*, de *cercle*, de *vitesse*, de *accélération*, de *quantité de chaleur*, etc.

transitive (comme le parallélisme des droites, l'équilibre des corps sur une balance), on conçoit cette relation comme une espèce d'égalité, à savoir comme l'identité d'une propriété *abstraite* de ces deux objets<sup>1</sup>. On est ainsi conduit à déterminer et à définir cette propriété au moyen de la relation en question; d'où le nom de *définition par abstraction*.

Au point de vue formel, une définition par abstraction s'énonce comme suit :

$$a \varepsilon \text{Cls. } x, y \varepsilon a, \circ : \varphi x = \varphi y. = . p_{x,y}$$

« L'égalité  $\varphi x = \varphi y$ , où la fonction  $\varphi$  est la notion à définir et où  $x$  et  $y$  sont des éléments d'une même classe  $a$ , équivaut à la proposition  $p$  relative à  $x, y$ . »

Mais cette définition peut être ramenée à la forme d'une définition nominale de la manière suivante. La proposition  $p_{x,y}$  est une relation entre  $x$  et  $y$ ; écrivons-la :  $xRy$ . Cette relation est symétrique et transitive par hypothèse; et son champ est la classe  $a$ . En vertu du *principe d'abstraction*<sup>2</sup>, on peut en conclure l'existence d'une relation uniforme  $S$  entre chacun des termes  $x, y$  et un même terme  $z$ , de telle sorte qu'on ait :

$$xRy. = . xSz. ySz$$

Ce terme  $z$  est fonction de  $x$  et fonction de  $y$ ; c'est son existence et son identité qui fondent l'égalité:  $\varphi x = \varphi y$ . On peut donc définir *nominalement* la fonction  $\varphi$  comme suit : c'est la relation qui unit le terme  $z$  à chacun des éléments  $x, y, \dots$  de la classe  $a$  entre lesquels existe la relation  $R$ . Ainsi la logique des relations permet de réduire les définitions par abstraction à des définitions nominales.

\*  
\* \* \*

Pour illustrer ces considérations théoriques, nous ne pouvons trouver un meilleur exemple que la théorie du nombre

<sup>1</sup> C'est en cela que consiste le *principe d'abstraction*, qui peut s'énoncer comme suit : Toute relation symétrique et transitive peut se ramener à une espèce d'égalité.

<sup>2</sup> V. *Les principes des mathématiques*, chap. I, § C.



entier, où l'on verra le nombre entier défini tour à tour par postulats, par abstraction et enfin nominalement.

La définition par postulats<sup>1</sup> consiste à prendre 3 notions indéfinissables:  $N$  (nombre entier positif),  $0$  (zéro), et  $\text{seq}$  (le suivant de)<sup>2</sup>:  $N$  est une classe,  $0$  un individu et  $\text{seq}$  une fonction. Puis on pose les cinq postulats suivants:

I.  $0 \in N$

« Zéro est un nombre<sup>3</sup>. »

II.  $x \in N . \circ_x . \text{seq } x \in N$

« Le suivant d'un nombre est un nombre<sup>4</sup>. »

III.  $x \in N . \circ_x . \text{seq } x = 0$

« Zéro n'est le suivant d'aucun nombre. »

IV.  $x, y \in N . \text{seq } x = \text{seq } y . \circ_{x, y} . x = y$

« Deux nombres, dont les suivants sont égaux, sont égaux<sup>5</sup>. »

V.  $0 \in a : x \in N \cap a . \circ_x . \text{seq } x \in a : \circ_a . N \cap a$

« Si une classe  $a$  contient  $0$ , et si, dès qu'elle contient un nombre  $x$ , elle contient le suivant de  $x$ , elle contient tous les nombres. » Ce dernier postulat est ce qu'on appelle le *principe de l'induction complète*. On le formule d'ordinaire comme suit: « Si une proposition est vraie pour  $0$ , et si, dès qu'elle est vraie pour  $n$ , elle est vraie pour  $n + 1$ , elle est vraie pour tous les nombres entiers<sup>6</sup>. »

<sup>1</sup> G. PEANO, *Arithmetices principia nova methodo exposita* (Turin, Bocca, 1889); *Sul concetto di numero*, ap. *Rivista di Matematica*, t. I (1891); *Formulaire de Mathématiques*, toutes les éditions; *Aritmetica generale e Algebra elementare* (Turin, Paravia, 1902).

<sup>2</sup> Ces notions sont indéfinissables, malgré la traduction verbale que nous en donnons parce que cette traduction n'est qu'une interprétation des 3 symboles  $N$ ,  $0$ ,  $\text{seq}$ , et que leur sens doit être déterminé uniquement par les postulats suivants.

<sup>3</sup> Nous dirons « nombre » pour abrégé, aucune confusion n'étant possible.

<sup>4</sup> Ceci implique que la fonction  $\text{seq}$  est uniforme, c.-à-d. que :

$$x, y \in N . x = y . \circ . \text{seq } x = \text{seq } y$$

(cf. le postulat IV).

<sup>5</sup> Autrement dit, la fonction  $\text{seq}$  est réciproque. (Cf. la note 2).

<sup>6</sup> L'équivalence des deux énoncés est évidente, si l'on remarque que toute proposition détermine une classe, à savoir l'ensemble des individus qui la vérifient.

De ces cinq postulats on peut déduire toutes les propositions de l'Arithmétique des nombres entiers positifs ; ils suffisent donc à « définir » les nombres entiers, c'est-à-dire qu'ils en expriment les propriétés fondamentales et caractéristiques. De plus, ils sont tous nécessaires, car ils sont indépendants les uns des autres. C'est ce qu'on peut prouver au moyen des interprétations suivantes, dont chacune vérifie tous les postulats, sauf celui dont elle porte le numéro :

I. La classe  $N$  (ordonnée par la fonction  $\text{seq}$ ) se compose de tous les nombres entiers positifs non nuls : 1, 2, 3, 4, 5, ... (Elle ne contient pas 0.<sup>1</sup>)

II. La classe  $N$  se compose des 10 premiers nombres entiers : 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 (le nombre 9 n'a pas de suivant).

III. La classe  $N$  se compose des nombres 0, 1, 2, formant une période : 0, 1, 2, 0, 1, 2, 0, 1, 2, ... (le nombre 0 est le suivant d'un autre nombre).

IV. La classe  $N$  est 0, 1, 2, 1, 2, 1, 2, ... (le suivant de 0 est 1, comme le suivant de 2.)

V. La classe  $N$  est la suite des nombres, mais  $\text{seq } x = x + 2$  (et non plus  $x + 1$ ). Le postulat V se trouve en défaut si l'on prend pour  $s$  l'ensemble des nombres pairs, car cette classe vérifie l'hypothèse, et non la thèse<sup>2</sup>.

Ainsi le système des cinq postulats est irréductible. On peut dire que le système des 3 notions premières :  $N$ , 0,  $\text{seq}$  se trouve défini comme vérifiant le système de postulats. Mais, bien entendu, ce n'est pas là une définition nominale. On peut traduire le principe d'induction en disant que  $N$  est la plus petite classe qui vérifie les postulats I et II : en effet, elle est contenue dans toute classe qui vérifie ces deux postulats ( $0 \in s$ , et  $x \in s \text{ o. seq. } x \in s$ ).

La définition par abstraction des nombres entiers est toute autre<sup>3</sup>. Elle consiste à considérer le nombre entier comme une propriété des classes (ce qu'on appelle leur *nombre car-*

<sup>1</sup> On peut évidemment faire commencer la suite des nombres à 1 (ou à un nombre quelconque), mais alors il faut substituer 1 à 0 dans les postulats I, III et V.

<sup>2</sup> A. PADOA, *Conférences sur la logique mathématique*, p. 51 (1898) ; G. PEANO, *Formulaire* 1899, p. 30.

<sup>3</sup> G. PEANO, *Formulaire* 1903, § 56.

dinal) et à définir par abstraction les nombres cardinaux comme des fonctions logiques ( $\text{Num } x$ ) en définissant seulement leur égalité :

$$a, b \varepsilon \text{Cls.} \circ : \text{Num } a = \text{Num } b . = . \exists (bfa) \text{ rcp} \quad \text{Df}$$

«  $a$  et  $b$  étant des classes, on dit que leurs nombres cardinaux sont égaux, s'il existe entre ces classes une correspondance univoque et réciproque. »

On peut alors définir 0 comme suit :

$$0 = \text{Num } \Lambda$$

« Zéro est le nombre cardinal de la classe nulle. »

D'où l'on peut déduire :

$$a \varepsilon \text{Cls.} \circ : \text{Num } a = 0 . = . a = \Lambda$$

Si l'on désigne (suivant la définition générale de cette notation) par « Num 'Cls », l'ensemble des nombres d'une classe quelconque, c'est-à-dire des nombres cardinaux, on pourra définir la somme de deux nombres cardinaux comme suit :

$$x, y \varepsilon \text{Num 'Cls.} \circ . x + y = \text{rz} \exists [a, b \varepsilon \text{Cls.} \text{Num } a = x . \text{Num } b = y . a \circ b = \Lambda . \circ_{a, b} . z = \text{Num } (a \circ b)] \quad \text{Df}$$

« Si  $x$  et  $y$  sont les nombres cardinaux respectifs des classes  $a$  et  $b$  qui n'ont aucun élément commun, leur somme ( $x + y$ ) sera, par définition, le nombre cardinal de la classe ( $a \circ b$ ), somme logique des classes  $a$  et  $b$ . » Ainsi l'addition arithmétique se trouve définie, d'une manière générale, au moyen de l'addition logique.

Cela posé, on pourra définir seq  $n$  par  $n + 1$ , somme du nombre cardinal  $n$  et de 1. On aura en conséquence :

$$n \varepsilon \text{Num 'Cls.} \circ . a \varepsilon \text{Cls.} \circ . \therefore \text{Num } a = n + 1 . = : \exists a : x \varepsilon a . \circ_x . \text{Num } (a - \iota x) = n$$

« Dire que la classe  $a$  a pour nombre cardinal  $n + 1$ , c'est dire qu'elle n'est pas nulle, et que, si  $x$  est un de ses éléments, la classe des  $a$  différents de  $x$  a pour nombre cardinal  $n$ . » En d'autres termes, une classe a le nombre  $n + 1$ , quand on peut l'obtenir en ajoutant un élément à une classe qui a le nombre  $n$ .

On ne peut nier que cette manière de définir le nombre cardinal ne soit plus naturelle et plus conforme à la conception ordinaire ; elle donne aux symboles  $N, 0$ , seq un sens plus concret et plus immédiat que ne faisait la définition par postulats. Seulement cette définition s'applique à tous les nombres cardinaux, même infinis, et non pas seulement aux nombres de la suite naturelle (dits *finis*) que nous avons désignés jusqu'ici par  $N$ . Or l'essence des nombres finis consiste précisément dans le principe d'induction, car celui-ci équivaut à la définition qu'on donne des classes finies, par opposition aux classes infinies (qui peuvent être équivalentes à une de leurs parties intégrantes)<sup>1</sup>. On pourra donc définir les nombres entiers finis comme suit : «  $N$  est la classe des nombres cardinaux qui appartiennent à toutes les classes qui contiennent 0, et qui contiennent  $(n + 1)$  dès qu'elles contiennent  $n$ . »

On a par là même une définition nominale du nombre entier fini ; seulement cette définition repose sur la notion de Num, qu'on n'a définie que par abstraction. Mais si l'on applique le principe d'abstraction à cette fonction, on pourra en conclure que la relation d'égalité de nombre ou d'équivalence entre deux classes se réduit à une relation uniforme de ces classes à un même terme, qui sera leur nombre cardinal. Et comme chaque concept est représenté par son extension, le nombre cardinal, conçu comme la propriété commune à toutes les classes *équivalentes*, sera représenté par la classe de ces classes. En d'autres termes, on peut répartir toutes les classes possibles en classes telles que, dans une même classe, toutes les classes ont le même nombre cardinal ; on a ainsi une correspondance univoque et réciproque entre les nombres cardinaux et les classes de classes, et l'on peut substituer ou identifier celles-ci à ceux-là. En résumé, on peut définir Num  $a$  nominalement comme suit :

$$a \in \text{Cls.} \circ \text{Num } a = \text{Cls} \circ x \circ [\exists (xfa) \text{rec}]$$

« Le nombre cardinal de la classe  $a$  est la classe des classes

<sup>1</sup> WHITEHEAD, *On cardinal numbers*, ap. *American Journal of Mathematics*, t. XXIV (1902), sect. III.

équivalentes à  $a$  » ; et alors, dire qu'une classe  $b$  a le même nombre que la classe  $a$ , c'est dire qu'elle appartient à la classe des classes équivalentes à  $a$  :

$$\begin{aligned} \text{Num } b = \text{Num } a. &= .b \varepsilon \text{Cls} \circ x \varepsilon [\exists (xfa) \text{rcp}] \\ &= [\exists (bfa) \text{rcp}] \end{aligned}$$

On peut donc se passer du symbole de fonction Num, de sorte qu'au lieu d'écrire ( $a$  étant une classe et  $n$  son nombre) :  $\text{Num } a = n$ , on écrira :

$$a \varepsilon n$$

c'est-à-dire : « la classe  $a$  appartient à la classe de classes  $n$ . »

On définira les nombres cardinaux eux-mêmes comme des classes de classes, sans le secours du symbole Num. On définira d'abord zéro comme suit :

$$0 = \iota \Lambda$$

« Zéro est la classe qui comprend la seule classe nulle. »  
Puis on définira le suivant d'un nombre :

$$n \varepsilon \text{N.} \circ . \text{seq } n = \text{Cls} \circ a \varepsilon (\exists a : x \varepsilon a. \circ x. a - \iota x \varepsilon n) \quad \text{Df}$$

«  $n$  étant un nombre,  $n + 1$  est la classe des classes  $a$  telles que, si  $x$  est un élément de  $a$ , la classe des  $a$  non égaux à  $x$  a le nombre  $n$ . »

Cette formule permet de définir progressivement tous les nombres cardinaux finis (puisque ceux-ci, par définition, sont ceux qu'on obtient en ajoutant toujours 1 au nombre précédemment obtenu). En particulier, 1 se définira comme le suivant de 0 :

$$1 = \text{Cls} \circ u \varepsilon (\exists u : x \varepsilon u. \circ x. u - \iota x \varepsilon 0)$$

Or :

$$u - \iota x \varepsilon 0. = . u - \iota x = \Lambda. = . u \circ \iota x$$

Mais :

$$u \circ \iota x. = : y \varepsilon u. \circ y. y = x$$

Donc :

$$\begin{aligned} x \varepsilon u. \circ x. u - \iota x \varepsilon 0 : &= : x \varepsilon u. \circ x : y \varepsilon u. \circ y. y = x : \\ &= : x \varepsilon u. y \varepsilon u. \circ x, y. y = x : = : x, y \varepsilon u. \circ x, y. y = x \end{aligned}$$

Substituons dans la définition de 1 : il vient :

$$1 = \text{Cls} \wedge u \exists (\exists u : x, y \in u . \circ x, y . y = x) \quad \text{Df}$$

On trouve ainsi la définition de la *classe singulière* : « 1 est la classe des classes  $u$  non nulles et telles que, si  $x, y$  sont des éléments de  $u$ , ils sont identiques. »

On définira de même :

$$2 = \text{Cls} \wedge u \exists (\exists u : x \in u . \circ x . u - \iota x \in 1)$$

$$3 = \text{Cls} \wedge u \exists (\exists u : x \in u . \circ x . u - \iota x \in 2)$$

et ainsi de suite. Enfin on pourra définir nominalement l'idée de nombre cardinal :

$$\text{Nc} = \text{Cls}' \text{Cls} \wedge z \exists [\exists \text{Cls} \wedge u \exists (z = \text{Num } u)] \quad \text{Df}$$

« Un nombre cardinal est une classe de classes  $z$  telle qu'il y a des classes  $u$  qui ont pour nombre cardinal  $z$ . »

Et l'idée de nombre cardinal *fini* sera définie au moyen du principe d'induction :

$$\text{Ncfin} = \text{Nc} \wedge n \exists [s \in \text{Cls} . 0 \in s : m \in \text{Nc} \wedge s . \circ m . m + 1 \in s : \circ . n \in s] \quad \text{Df}$$

« L'ensemble des nombres cardinaux finis est une classe  $n$  de nombres cardinaux qui vérifie le principe d'induction ; » et celui-ci pourra alors être affirmé de la classe  $\text{Ncfin}$  :

$$(\text{Induc}) \quad s \in \text{Cls} . 0 \in s : m \in \text{Nc} \wedge s . \circ m . m + 1 \in s : \circ . \text{Ncfin} \in s$$

On peut démontrer que 0, 1, 2, ... sont des nombres finis, et que, si  $n$  est un nombre fini,  $n + 1$  l'est aussi <sup>1</sup>.

\*  
\* \* \*

Les considérations précédentes nous amènent à examiner ce qu'on appelle les *définitions* et les *démonstrations par induction*, ou encore *par récurrence*. Une *définition* par induction consiste à définir un concept (fonction d'un nombre entier indéterminé) pour le nombre 0 (ou 1, ou tel autre nombre entier déterminé), puis à définir le même concept pour le nombre  $(n + 1)$  en fonction de sa valeur (supposée connue) pour le nombre  $n$ ; on dit alors que ce concept est

<sup>1</sup> WHITEHEAD, *mémoire cité*.

défini pour tous les nombres entiers (à partir du premier nombre visé dans la définition) <sup>1</sup>. De même, une *démonstration par induction* consiste à démontrer une proposition (où figure un nombre entier indéterminé) pour le nombre 0 (ou 1, etc.), puis à démontrer que, si cette proposition est vraie pour le nombre  $n$ , elle est encore vraie pour le nombre  $n + 1$ ; d'où l'on conclut qu'elle est vraie pour tous les nombres entiers (à partir du premier nombre visé dans la démonstration) <sup>2</sup>. Ces deux méthodes, dont l'analogie est mani-

<sup>1</sup> Exemples de définitions par induction :

I. Définition de la somme de deux nombres entiers :

$$\left\{ \begin{array}{l} a \in \mathbb{N} . \circ . a + 0 = a \\ a, b \in \mathbb{N} . \circ . a + \text{seq } b = \text{seq } (a + b) \end{array} \right. \begin{array}{l} (1) \\ (2) \end{array}$$

d'où :  $a + 1 = \text{seq } (a + 0) = \text{seq } a$   
 et alors (2) devient :  $a + (b + 1) = (a + b) + 1$

II. Définition du produit de deux nombres entiers :

$$\left\{ \begin{array}{l} a \in \mathbb{N} . \circ . a \times 0 = 0 \\ a, b \in \mathbb{N} . \circ . a \times (b + 1) = (a \times b) + a \end{array} \right. \begin{array}{l} (1) \\ (2) \end{array}$$

d'où :  $a \times 1 = (a \times 0) + a = 0 + a = a$ .

III. Définition des puissances entières d'un nombre entier :

$$\left\{ \begin{array}{l} a \in \mathbb{N} . \circ . a^0 = 1 \\ a, n \in \mathbb{N} . \circ . a^{n+1} = a^n \times a \end{array} \right. \begin{array}{l} (1) \\ (2) \end{array}$$

d'où :  $a^1 = a^0 \times a = 1 \times a = a$ .

<sup>2</sup> Exemples de démonstrations par induction :

I. Loi associative de l'addition :

$$a, b, c \in \mathbb{N} . \circ . (a + b) + c = a + (b + c)$$

Dem :  $\text{Hp. } c = 0 . \circ . \text{Ts}$

« Le théorème est vrai pour  $c = 0$ . »

$$\begin{aligned} \text{Hp. } (a + b) + c = a + (b + c) . \circ . (a + b) + (c + 1) &= [(a + b) + c] + 1 = \\ &= [a + (b + c)] + 1 = a + [(b + c) + 1] = a + [b + (c + 1)] \end{aligned} \quad (2)$$

« En supposant le théorème vrai pour  $c$ , on démontre, par des transformations permises, qu'il est vrai pour  $c + 1$ . »

Induct. (1). (2).  $\circ$ . P

« En vertu du principe d'induction, (1) et (2) démontrent le théorème. »

feste, reposent sur le principe d'induction. Comme une définition joue dans les raisonnements le rôle d'une proposition, on comprend que le principe d'induction s'applique aux définitions comme aux propositions. Nous nous bornons donc, pour simplifier, à étudier les démonstrations par induction.

Ce mode de raisonnement était considéré autrefois comme une *induction*, parce que, semblait-il, il permettait de conclure de quelques cas à tous ; mais, s'il en était vraiment ainsi, il ne serait pas logiquement probant. On a essayé de corriger cette conséquence en qualifiant cette induction de *complète*, pour indiquer qu'elle épuise tous les cas possibles. Mais il y a là une équivoque : tous les cas possibles figurent-ils dans les prémisses ou dans les conséquences ? S'ils ne figurent

II. Loi commutative de l'addition :

$$a, b \in \mathbb{N} . \text{.} . a + b = b + a$$

$$\text{Dem :} \quad \text{Df} + . \text{.} . 0 + 0 = 0 \quad (1)$$

$$0 + a = a . \text{.} . 0 + (a + 1) = (0 + a) + 1 = a + 1 \quad (2)$$

$$\text{Induc. (1) . (2) .} . \text{.} . 0 + a = a \quad (3)$$

$$\text{Df} + . \text{.} . 1 + 0 = 0 + 1 = 1 \quad (4)$$

$$1 + a = a + 1 . \text{.} . 1 + (a + 1) = (1 + a) + 1 = (a + 1) + 1 \quad (5)$$

$$\text{Induc. (4) . (5) .} . \text{.} . 1 + a = a + 1 \quad (6)$$

$$a + b = b + a . \text{.} . a + (b + 1) = (a + b) + 1 = (b + a) + 1$$

$$= b + (a + 1) = b + (1 + a) = (b + 1) + a \quad (7)$$

$$\text{Induc. (6) . (7) .} . \text{.} . \text{P}$$

Dans cette démonstration, on applique trois fois le principe d'induction : d'abord, pour conclure de (1) et (2) à (3) ; puis pour conclure de (4) et (5) à (6) ; enfin pour conclure de (6) et (7) le théorème à prouver ; (3) sert à prouver (4). La loi associative est employée pour prouver (2), (5), (7) : elle est invoquée 3 fois dans (7).

III. Loi distributive de la multiplication :

$$a, b, c \in \mathbb{N} . \text{.} . (a + b)c = ac + bc$$

$$\text{Hp.} . c = 0 . \text{.} . \text{Ts} \quad (1)$$

$$\text{Hp.} . (a + b)c = ac + bc . \text{.} . (a + b)(c + 1) = (a + b)c + (a + b) = \\ ac + bc + a + b = (ac + a) + (bc + b) = a(c + 1) + b(c + 1) \quad (2)$$

$$\text{Induc. (1) . (2) .} . \text{.} . \text{P}$$

On pourrait multiplier ces exemples : la plupart des lois fondamentales de la théorie des nombres *finis* se démontrent par induction. V. le *Formulaire* de M. PEANO.



que dans les conséquences, il y a inférence illégitime de quelques cas à tous, et par suite l'induction est ordinaire et incomplète. S'ils figurent aussi dans les prémisses, le raisonnement se réduit presque à une tautologie : « Si le théorème est vrai de chaque nombre entier (pris à part), il est vrai de tous les nombres entiers (en général). » Mais, en réalité, il n'est pas une induction : sans doute, que le théorème soit vrai pour 0 (ou 1), c'est là une vérité *particulière* ; mais que, si le théorème est vrai pour  $n$ , il soit vrai pour  $n + 1$ , c'est là une vérité *universelle*, puisque  $n$  peut prendre dans cet énoncé n'importe quelle valeur entière. C'est cette seconde prémisses qui fait l'universalité du théorème considéré ; et il n'y a là aucune inférence du particulier à l'universel.

On a prétendu<sup>1</sup> que le raisonnement par induction enveloppe « une infinité de syllogismes », et par suite repose sur quelque principe extra-logique « irréductible au principe de contradiction »<sup>2</sup>. On dit : Le théorème est vrai pour 0 ; s'il est vrai pour 0, il est vrai pour 1 ; s'il est vrai pour 1, il est vrai pour 2 ; et ainsi de suite indéfiniment<sup>3</sup>. Et il paraît que cette infinité échappe (on ne sait pourquoi) aux prises de la Logique, comme si le nombre infini (nombre cardinal des nombres entiers finis) n'était pas susceptible d'une définition logique. A cela on peut répondre d'abord que, pour prouver le théorème en question pour un nombre entier *quelconque*, il suffit d'un nombre fini de syllogismes, ou plutôt de déductions simples : c'est ce qu'indique le nom de raisonnement *par récurrence*. Et si le théorème général enveloppe une infinité de cas particuliers (à savoir l'infinité des nombres entiers), c'est parce que la prémisses : « Si le théorème est vrai de  $n$ , il est encore vrai de  $n + 1$  », enveloppe cette même infinité, et possède exactement la même généralité. Tous les théorèmes généraux de l'Arithmétique ont la même portée infinie, en tant que tous valent pour *tous* les nombres entiers.

<sup>1</sup> H. POINCARÉ, *Sur la nature du raisonnement mathématique*, ap. *Revue de Métaphysique et de Morale*, t. II, p. 371 (1894) ; *La science et l'hypothèse*, p. 19 sqq.

<sup>2</sup> Comme si le principe de contradiction était le seul principe de la logique, selon un préjugé inexplicable qui a cours chez les philosophes.

<sup>3</sup> Ce ne sont pas là d'ailleurs des « syllogismes », mais des raisonnements hypothétiques enchaînés de telle sorte que la thèse du précédent est l'hypothèse du suivant.

Il n'y a là rien d'illogique ni de mystérieux, mais simplement ce fait qu'un concept (ici celui de nombre) peut avoir une extension infinie, sans que cela empêche de raisonner logiquement sur lui. Dans tous les cas, la conclusion n'est pas plus générale que la prémisse ; le passage de la prémisse à la conclusion est donc parfaitement logique<sup>1</sup>, et il n'enveloppe pas « une infinité de syllogismes » : tout au contraire, la prémisse universelle : « Si le théorème est vrai pour  $n$ , il est vrai pour  $n+1$  » dispense de cette prétendue suite infinie de déductions et les remplace par une seule, grâce au principe d'induction.

D'autre part, on a voulu voir<sup>2</sup>, dans la démonstration par induction, le type du raisonnement mathématique, lequel serait étranger à la logique. Mais d'abord, le raisonnement par induction n'est nullement une méthode *générale* des mathématiques ; il est *spécial* à l'arithmétique des nombres entiers finis ; et pour s'en rendre compte, il suffit de remarquer qu'il repose sur le principe d'induction, lequel fait partie de la définition des nombres finis<sup>3</sup>. Il ne peut s'appliquer qu'aux propositions (ou définitions) où figure quelque fonction d'un nombre entier fini ; hors ce cas, relativement restreint, il n'a plus d'application ni même de sens. Cette opinion erronée n'a pu provenir que de l'*arithmétisation* excessive à laquelle on a soumis les mathématiques ; elle ne se justifierait que dans la thèse où non seulement l'Analyse, mais toute la Mathématique reposerait entièrement sur la seule notion de nombre entier. Mais cette thèse, qui a été assez longtemps à la mode, est à présent dépassée et réfutée<sup>4</sup> ; et en tout cas, il suffit (sans parler de la théorie des ensembles et des nombres infinis) de citer la Géométrie pour montrer un domaine où le raisonnement mathématique le plus

<sup>1</sup> D'ailleurs, c'est une erreur de croire que la déduction logique ne puisse passer du particulier au général ; nous l'avons montré au *Congrès de philosophie* de Genève (1904). V. les Comptes rendus du Congrès, et la *Revue de Métaphysique et de Morale*, novembre 1904.

<sup>2</sup> H. POINCARÉ, *ibid.*

<sup>3</sup> Cette remarque a été faite par M. BURALI-FORTI. *Le classi finite*, p. 3, note 5, ap. *Atti dell'Accademia delle Scienze di Torino*, t. XXXII (1896) ; et mémoire déjà cité du *Congrès de Philosophie* (1900).

<sup>4</sup> V. notre ouvrage : *Les principes des mathématiques*.

rigoureux règne, sans prendre la forme de l'induction (si ce n'est dans les cas où un concept est fonction d'un nombre entier, comme le concept de polygone ( $n$ -gone), ce qui confirme notre thèse).

Enfin, et c'est là le point le plus important, le raisonnement par induction n'est nullement étranger ou réfractaire à la Logique; et la preuve en est que nous avons pu le formuler symboliquement en termes purement logiques. Le principe d'induction n'est pas, comme on le croit, un principe original et extra-logique que les Mathématiques seraient obligées d'adjoindre aux principes de la Logique pour pouvoir démontrer leurs propositions; c'est, on l'a vu, une partie essentielle de la définition du nombre entier. Dira-t-on qu'il y a quelque chose d'artificiel et d'arbitraire à transformer un principe en une définition, ce qui semble lui enlever sa « valeur de vérité » et le réduire à une simple convention? A cela il est facile de répondre que, si l'on retranchait le principe d'induction de la définition du nombre, le nombre ne serait plus défini, puisqu'on ne pourrait plus déduire ses propriétés de sa définition. Il faut donc bien que le principe d'induction soit incorporé à sa définition; et il n'y a là rien d'arbitraire, si l'on veut définir, non un concept quelconque qu'on appellerait *nombre*, mais l'idée du nombre entier fini, qui est la base traditionnelle de l'Arithmétique ordinaire. Concluons donc que ni les Mathématiques en général, ni l'Arithmétique en particulier n'ont besoin, pour se constituer déductivement, de principes spéciaux, d'« axiomes propres », et que les principes généraux de la Logique leur suffisent, quand on leur adjoint, bien entendu, les définitions logiques des concepts propres aux mathématiques. La méthode mathématique n'est pas autre que la méthode logique, et la Mathématique elle-même n'est pas une science spéciale et autonome, mais une branche ou une application de la Logique. Telle est la conclusion philosophique la plus importante des recherches relatives à la Logique mathématique.

Louis COUTURAT (Paris).