

LA NOTION DE FONCTION DANS L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE DES ÉCOLES MOYENNES 1

Autor(en): **Fehr, H.**

Objektyp: **Article**

Zeitschrift: **L'Enseignement Mathématique**

Band (Jahr): **7 (1905)**

Heft 1: **L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE**

PDF erstellt am: **13.07.2024**

Persistenter Link: <https://doi.org/10.5169/seals-8428>

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Inhalten der Zeitschriften. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern. Die auf der Plattform e-periodica veröffentlichten Dokumente stehen für nicht-kommerzielle Zwecke in Lehre und Forschung sowie für die private Nutzung frei zur Verfügung. Einzelne Dateien oder Ausdrucke aus diesem Angebot können zusammen mit diesen Nutzungsbedingungen und den korrekten Herkunftsbezeichnungen weitergegeben werden. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Die systematische Speicherung von Teilen des elektronischen Angebots auf anderen Servern bedarf ebenfalls des schriftlichen Einverständnisses der Rechteinhaber.

Haftungsausschluss

Alle Angaben erfolgen ohne Gewähr für Vollständigkeit oder Richtigkeit. Es wird keine Haftung übernommen für Schäden durch die Verwendung von Informationen aus diesem Online-Angebot oder durch das Fehlen von Informationen. Dies gilt auch für Inhalte Dritter, die über dieses Angebot zugänglich sind.

LA NOTION DE FONCTION

DANS L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE
DES ÉCOLES MOYENNES¹

par H. FEHR

1. Le principal but que poursuit notre Association est de contribuer aux progrès de l'enseignement mathématique dans nos écoles moyennes. Mais nos efforts ne doivent pas seulement tendre à améliorer les méthodes ; ils doivent aussi avoir en vue une meilleure adaptation des programmes aux besoins de notre époque. Dans cet ordre d'idées il est une série de questions très importantes qui pourront être mises à l'ordre du jour des prochaines réunions annuelles ; ainsi, outre le sujet que j'ai eu l'honneur de vous proposer pour cette séance, il y aurait lieu d'examiner, entre autres, l'enseignement de l'arithmétique dans les divers établissements secondaires, la fusion de la Planimétrie et de la Stéréométrie ; d'autre part, il serait bon de provoquer un échange de vues sur la préparation scientifique et pédagogique des maîtres de mathématiques, etc.

Les plans d'études et les programmes doivent suivre l'évolution de la Science ; aussi n'ont-ils toujours qu'un caractère provisoire. Ils doivent être revus de temps en temps, afin d'être toujours conformes aux conditions de la science moderne et de la vie économique. Si l'on examine à ce point de vue les programmes actuels pour les diverses parties des mathématiques élémentaires, depuis les notions d'Arithmétique et de Géométrie jusqu'aux éléments des Mathématiques supérieures, on constate qu'ils contiennent encore bien

¹ Conférence faite à la Réunion annuelle de l'Association des maîtres de mathématiques des Ecoles moyennes suisses, tenue à Zurich le 17 décembre 1904 ; traduction de l'auteur.

des problèmes, des chapitres même, qui peuvent être laissés de côté pour faire place à des notions nouvelles plus importantes et d'une portée scientifique plus réelle. Telle est la *notion de fonction*, et je me propose d'examiner ici la place qu'il convient de lui accorder dans l'enseignement des écoles moyennes.

La question n'est pas nouvelle. Elle est de nouveau à l'ordre du jour en Allemagne, où elle vient de faire l'objet d'une intéressante brochure¹ publiée par M. le prof. KLEIN et dont je vous recommande vivement la lecture.

2. Je limiterai mon exposé à l'examen des deux points suivants :

I. *Y a-t-il lieu d'introduire la notion de fonction et ses applications fondamentales les plus simples dans le plan d'études des différentes sections des écoles moyennes ?*

II. *Dans l'affirmative, comment et dans quelle mesure cette notion doit-elle être introduite ?*

Dans les sections techniques (Écoles industrielles, etc.) la notion de fonction est déjà largement mise à contribution. D'autre part, dans la plupart de nos gymnases, écoles normales d'instituteurs ou écoles de commerce, les élèves ont l'occasion de pratiquer les représentations graphiques, et il ne doit guère exister d'école technique moyenne où la notion de fonction ne soit pas utilisée dans une large mesure. Il y a donc lieu d'envisager principalement les sections et les écoles n'ayant pas un caractère technique.

3. La *première question* revient à demander si la notion de fonction fait partie du fonds commun de connaissances générales que doivent fournir les différentes sections de l'enseignement secondaire. La réponse ne fait pas de doute. En effet, si l'on considère les progrès toujours croissants de la Science, on constate que les Mathématiques pénètrent de plus en plus dans les branches les plus diverses. Le plus

¹ *Ueber eine zeitgemässe Umgestaltung des mathematischen Unterrichts an den höheren Schulen.* Vorträge gehalten bei Gelegenheit des Ferienkurses für Oberlehrer der Mathematik u. Physik, Göttingen, Ostern 1904. B.-G. Teubner, Leipzig, 1904.

souvent c'est précisément la notion de fonction qui joue le rôle fondamental. Ainsi, il n'est guère possible d'enseigner d'une manière rationnelle les éléments de Mécanique et la Physique sans les premiers éléments d'Analyse. On rencontre constamment la dérivée d'une fonction, par exemple dans la vitesse, l'accélération, la tangente à la trajectoire, la chute de potentiel, etc. Les diagrammes, les représentations graphiques, l'établissement de formules empiriques, ne se retrouvent pas seulement dans toutes les branches des sciences techniques, on en fait également usage dans les sciences naturelles et biologiques et dans des questions d'ordre sociologique : qu'il me suffise de rappeler ici les Cours d'Economie politique de WALRAS et de PARETO. On peut dire que de nos jours, pour le chimiste comme pour le botaniste, pour le médecin et le biologiste comme pour le juriste, une connaissance approfondie de la notion de fonction est devenue indispensable, car sans elle un grand nombre de propriétés fondamentales lui restent entièrement inaccessibles. C'est dire *qu'en raison de sa grande portée et de ses applications fondamentales dans les divers domaines de la Science, la notion de fonction doit faire partie du programme des écoles moyennes*. Telle est ma réponse à la première question.

4. Nous avons maintenant à examiner la *seconde question* : comment et dans quelle mesure la notion de fonction et ses applications fondamentales les plus simples peuvent-elles être introduites dans l'enseignement des écoles moyennes ?

Comme préparation à une première introduction il est bon de familiariser l'élève de bonne heure avec la notion de coordonnées. Il s'agira d'abord, cela va sans dire, des coordonnées rectangulaires et leur application à la représentation graphique de la relation entre deux variables : temps et température, temps et pression atmosphérique, temps et niveau du lac, tableaux statistiques, etc. Dès les premiers exercices l'élève exécutera lui-même quelques graphiques sur du papier quadrillé et quelquefois aussi sur du papier millimétrique. Ces exercices constitueront en même temps une pre-

mière initiation à la Géométrie analytique; ils peuvent avoir lieu, comme cela se fait du reste dans divers établissements, immédiatement après la résolution des équations du premier et du second degré.

Jusqu'ici les élèves n'ont guère rencontré que des nombres *connus* et des nombres *inconnus*, ils acquièrent maintenant l'idée de *variable*, ce qui leur permettra ensuite de se familiariser avec la *notion de fonction*. On examinera la représentation graphique de fonctions simples en commençant par les fonctions

$$(1) \quad y = ax + b, \quad y = ax^2, \quad y = ax^2 + bx + c,$$

dans lesquelles on attribuera d'abord aux coefficients des valeurs numériques très simples. L'élève doit être rendu attentif au fait que dans

$$ax + b = 0, \quad ax^2 + bx + c = 0,$$

x est une *inconnue*, tandis que dans 1° x est une *variable*. L'exposé sera complété par la discussion.

$$ax + b \geq 0, \quad ax^2 + bx + c \geq 0.$$

Puis vient une seconde série de représentations graphiques fournie par les fonctions

$$(2) \quad y = \frac{1}{x}, \quad y = \frac{a}{x + p}, \quad y = \frac{ax + b}{a'x + b'}.$$

Ce serait là une première étape. Mais, dans la suite, on saisira chaque occasion pour utiliser les nouvelles acquisitions. Par exemple, en Algèbre, on fera suivre l'étude des fonctions exponentielle et logarithmique

$$(3) \quad y = a^x, \quad y = \log x,$$

de la représentation graphique de ces fonctions; en trigonométrie, on construira les courbes

$$(4) \quad y = \sin x, \quad y = \tan x.$$

Suivant les établissements, il y aura lieu de développer ces

exercices en examinant encore les courbes

$$(5) \quad y = ax^3 + b, \quad y = ax^3 + bx;$$

$$(6) \quad y = \frac{a}{x^2 + px + q}, \quad y = \frac{ax + b}{x^2 + px + q}, \quad y = \frac{ax^2 + bx + c}{x^2 + px + q},$$

et en construisant quelques familles de courbes sur papier millimétrique, par exemple, les courbes en coordonnées rectangulaires :

$$(7) \quad y = x^m \left. \vphantom{y = x^m} \right\} \text{ pour } m = 1, 2, 3, 5, 10; \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{5}, \frac{1}{10};$$

$$(8) \quad y = x^{-m}$$

$$(9) \quad y = a^{bx} \left\{ \begin{array}{l} \text{d'abord pour } b = 0, 1, 2, 3, 4; \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}; \\ \text{puis pour } b = 0, -1, -2, -3, -4; \frac{1}{2}, -\frac{1}{3}, -\frac{1}{4}; \end{array} \right.$$

$$(10) \quad y = a \sin x, \quad y = \sin bx, \quad y = \sin(x + c), \quad y = a \sin(bx + c),$$

on aura soin de faire ressortir le rôle des coefficients a, b, c ; on construira aussi quelques courbes en *coordonnées polaires*, par exemple

$$(11) \quad \rho = a\theta, \quad \rho = \frac{a}{\theta}, \quad \rho = a^{b\theta}, \quad \text{pour } a > 0;$$

$$(12) \quad \rho = a + b \cos \theta, \quad \text{pour } a \lesseqgtr b;$$

$$(13) \quad \rho = a + b \cos n\theta \quad \text{» pour } n = 1, 2, 3, \dots$$

Mais ce ne sont là que des exemples, et nous n'avons pas à entrer ici dans le détail des programmes.

5. A l'aide d'exemples du genre de ceux que je viens d'indiquer, nous aurons donc familiarisé l'élève avec la représentation graphique de fonctions simples. Mais le but n'est pas encore atteint. Il faut l'initier maintenant à l'étude des deux problèmes fondamentaux qui viennent se rattacher à la notion de fonction ou à la courbe correspondant à une fonction. L'élève ne possédera suffisamment la notion de fonction que lorsqu'il pourra discuter la variation des fonctions simples, ce qui n'est possible que s'il connaît la *déri-*

née. Cette importante notion devra être appliquée à un grand nombre d'exemples empruntés aux domaines les plus variés de la Science, car il s'agit ici non pas simplement d'exercices mathématiques, mais avant tout de l'acquisition d'une idée nouvelle, celle de dérivée, et des diverses interprétations dont elle est susceptible. Il y aura lieu d'insister tout particulièrement sur les interprétations géométriques et cinématiques.

Quant à la notation, nous dirons avec M. POINCARÉ (voir *l'Ens. math.*, 6^{me} année, p. 277, 1904) qu'« il faut dans les commencements employer exclusivement la notation de Lagrange », qui consiste à écrire $f'(x)$.

En dernier lieu viendra le problème inverse, celui de la détermination de la *fonction primitive* d'une fonction donnée et son application à la mesure d'une surface plane. Ici encore on étudiera des exemples typiques très simples empruntés aux diverses branches des mathématiques pures et appliquées.

6. Comme vous le voyez, il s'agit en réalité d'introduire dans les programmes les deux concepts fondamentaux du Calcul infinitésimal, le problème des tangentes et le problème des quadratures. Ce sont ces deux applications fondamentales de la notion de fonction qui doivent former le couronnement des études mathématiques dans les écoles moyennes. Au reste, on rencontre déjà maintenant l'idée de limite et d'autres notions d'Analyse dans l'enseignement moyen des Mathématiques et de la Physique ; mais ces notions doivent être coordonnées méthodiquement, afin de pouvoir être utilisées par les diverses branches scientifiques.

Ce premier examen des deux problèmes fondamentaux de l'Analyse aurait en outre le grand avantage de combler l'abîme qui sépare l'enseignement mathématique moyen de l'enseignement supérieur.

Il n'est guère besoin de dire que dans cette transformation du plan des études mathématiques, nous devons opérer avec la plus grande prudence et procéder par améliorations progressives. D'une part il faut *se borner aux fonctions les*

plus simples et aux notions fondamentales les plus essentielles; d'autre part, on ne devra jamais perdre de vue qu'il s'agit d'une première initiation dans laquelle toute théorie abstraite doit être évitée.

7. En France, les plans d'études ont subi une transformation dans ce sens il y a deux ans. Il me paraît intéressant de vous donner, simplement à titre d'exemple, un court aperçu des nouveaux programmes français au point de vue de la question qui nous occupe en ce moment. La nouvelle organisation de l'enseignement secondaire français n'étant probablement pas connue de la plupart d'entre vous, je crois indispensable d'en indiquer d'abord les principales divisions¹.

L'enseignement secondaire fait suite à un cours d'*Etudes primaires* d'une durée normale de *quatre années*. Il est constitué par un cours d'études d'une durée de *sept ans* et comprend *deux cycles*.

Premier cycle : Durée : quatre ans ; Classes VI, V, IV, III (dites de *Sixième*, de *Cinquième*, de *Quatrième* et de *Troisième*). Dans ce premier cycle les élèves ont le choix entre deux divisions. Dans la *Division A* le latin et le grec sont obligatoires; la *Division B*, qui ne comporte pas d'enseignement du latin et du grec, donne plus de développement à l'enseignement du français, des sciences, du dessin, etc. Ce premier cycle conduit à un *certificat d'études secondaires* du premier degré.

Second cycle : Durée : trois ans ; Classes II et I (dites de *seconde* et de *première*) et Classe de Philosophie ou Classe de Mathématiques. Dans ce second cycle les élèves ont le choix entre *quatre sections* :

Section A. Le latin avec le grec;

Section B. Le latin avec une étude plus développée des langues vivantes ;

Section C. Le latin avec une étude plus complète des sciences;

¹ Pour plus de détails voir le *Plan d'études et Programmes d'enseignement dans les Lycées et Collèges de garçons*. (Arrêtés du 31 mai 1902, Delalain frères, Paris.)

Section D. L'étude des langues vivantes unie à celle des sciences sans cours de latin.

La section A correspond aux sections classiques de nos gymnases, les sections C et D aux sections réales, tandis que la section D (terminée par la Classe de Mathématiques) peut être comparée à nos sections techniques (ou industrielles).

A l'issue de la Classe de Première, les élèves peuvent se présenter à la *première partie* du *Baccalauréat de l'enseignement secondaire*, dont ils subissent les épreuves d'après la section qu'ils ont suivie pendant le second cycle.

Pour la troisième et dernière année du second cycle, les élèves ont le droit d'opter entre les cours de la *Classe de Philosophie* et ceux de la *Classe de Mathématiques*; à la fin de ces cours, ils peuvent se présenter à la *deuxième partie* du *Baccalauréat* dont ils subissent les épreuves correspondant aux études de la section qu'ils ont suivie. Je tiens à vous faire remarquer que *tous les diplômes de bachelier confèrent les mêmes droits*.

Faisant suite à la Classe de Mathématiques vient encore la *Classe de Mathématiques spéciales*¹ destinée à préparer les candidats aux grandes Ecoles : Ecole Polytechnique, Ecole centrale des Arts et Manufactures, etc.

Examinons maintenant les programmes et voyons la place réservée à la *notion de fonction* et aux représentations graphiques. C'est dans la *Classe de troisième* (Divis. B) qu'elles se présentent pour la première fois :

«... Variation de l'expression $ax + b$, représentation graphique... Représentation graphique des variations de x^2 , $\frac{1}{x}$ etc. ... »

Puis, dans le programme des *Classes de seconde*, C et D, on lit :

«... Variation du trinôme du second degré ; représentation graphique. Variation de l'expression $\frac{ax + b}{a'x + b'}$ représentation graphique. »

« Notion de la dérivée ; signification géométrique de la dérivée... »

¹ Voir le Rapport de M. APPELL et le nouveau programme dans l'*Ens. Math.* 6^e année, p. 485-494, 1904 ; 7^e année, p. 66-76, 1905.

Le programme de la *Classe de Philosophie* est de nature à nous intéresser tout particulièrement. J'en extrais les passages suivants :

«... Notion de fonction, représentation graphique de fonctions très simples... Usage du papier quadrillé...

« Notion de la tangente et de la dérivée... Notions sur l'usage de la dérivée pour reconnaître le sens de la variation d'une fonction. »

« Problème inverse de la recherche d'une dérivée. Aire d'un triangle, ou d'une parabole, obtenue par la recherche d'une fonction dont la dérivée, par rapport à x , est ax ou ax^2 . »

« Notions sur la méthode infinitésimale; exemples d'infiniments petits de divers ordres, limites de rapports ou de sommes obtenues en négligeant des quantités infiniment petites par rapport à celles que l'on conserve. Application à l'évaluation des volumes ou des surfaces de corps considérés en Géométrie élémentaire. »

Pour avoir une idée exacte de la mesure dans laquelle ces différentes notions ont pénétré dans l'enseignement secondaire français, il suffit de consulter les nouveaux manuels. En voici quelques-uns; vous pourrez en prendre connaissance au cours de cette réunion. Rédigés par des hommes qui sont à la fois d'excellents professeurs et des savants très estimés, ces ouvrages offrent toutes les garanties désirables tant au point de vue pédagogique qu'au point de vue scientifique. Voici les titres de ces manuels et les classes auxquelles ils sont destinés :

Algèbre, premier cycle, par Emile BOREL, Maître de Conférences à l'École normale supérieure, Librairie A. Colin, Paris, 1903. — Classe de 3^e A, Classes de 4^e et de 3^e B.

Algèbre, second cycle (du même auteur). — Classes de 2^e et de 1^{re} C et D.

Précis d'Algèbre, contenant 557 exercices et problèmes, par Carlo BOURLET, Docteur ès sciences, Professeur de mathématiques spéciales au Lycée St-Louis, Librairie Hachette, Paris, 1904. — Classes de 2^e et 1^{re} C et D.

Notions de Mathématiques, par Jules TANNERY, sous-directeur des Etudes scientifiques à l'École normale supérieure, suivies de *Notions historiques* par Paul TANNERY, Paris, 1903. — Classe de Philosophie.

Traité d'Algèbre, par A. GRÉVY, Docteur ès sciences, Pro-

fesseur agrégé au Lycée St-Louis, Librairie Vuibert et Nony, Paris, 1905. — Classe de Mathématiques.

8. Les programmes et les ouvrages que je viens de citer montrent que la notion de fonction a été largement prise en considération dans toutes les sections de l'enseignement secondaire français. J'attire tout particulièrement votre attention sur le programme de la Classe de Philosophie tel qu'il a été développé dans le bel ouvrage de MM. TANNERY.

C'est maintenant à nous qu'il appartient d'examiner dans quelle mesure il est possible de moderniser les programmes de nos écoles moyennes en les adaptant aux nécessités de l'enseignement scientifique actuel, mais en tenant compte, cela va sans dire, des conditions spéciales des divers établissements. La discussion ne peut donc porter que sur des propositions tout à fait générales. J'en formulerai deux, qui sont en quelque sorte les conclusions de mon Rapport. Je vous propose de les adopter à titre de vœux :

I. *En raison de leur importance et de leur portée, la notion de fonction et les problèmes fondamentaux qui s'y rattachent appartiennent au programme de l'enseignement mathématique des écoles moyennes.*

II. *Quant à l'étendue et à la méthode on devra, d'une part, se borner aux notions fondamentales et à leurs applications typiques les plus simples, et, d'autre part, éviter un exposé purement abstrait.*

Discussion. — La conférence a été suivie d'une intéressante discussion à laquelle ont pris part MM. WILD (par une lettre datée de St-Gall), SCHERRER (Küsnacht-Zurich), BRANDENBERGER (Zurich), SUTER (Kilchberg-Zurich), BUTZBERGER (Zurich), FLATT (Bâle), GUBLER (Zurich), JUZI (Bienne) et FEHR. Faute de place, nous devons nous borner à en donner un résumé très bref. Les divers orateurs ont parlé en faveur des deux propositions. M. Suter a recommandé que, dans l'exposé de ces notions, ainsi que du reste dans l'enseignement mathématique d'une manière générale, il soit tenu compte du développement historique.

M. Fehr tient à faire remarquer qu'il a évité à dessein les termes d'« Eléments de Calcul différentiel et intégral », parce qu'il craint que ceux-ci ne soient mal interprétés dans certains milieux, et

qu'en réalité il s'agit non pas d'introduire l'ensemble de ces éléments dans les programmes de l'enseignement secondaire supérieur, mais de fournir une première initiation à l'aide de quelques problèmes fondamentaux très simples. Il se déclare entièrement d'accord avec la proposition de M. Suter visant l'introduction de notions historiques dans l'enseignement des classes supérieures et il propose qu'une phrase dans ce sens soit ajoutée au second vœu. L'assemblée décide d'en faire un troisième vœu :

III. Il est désirable que dans l'enseignement secondaire supérieur, notamment dans les Gymnases, une plus grande place soit accordée au développement historique des Mathématiques.

Ces trois propositions ont été adoptées à l'unanimité.

SUR LES DÉVELOPPEMENTS EN SÉRIES

de $\sin x$ et $\cos x$.

D'après le nouveau programme officiel d'admission à l'École Centrale des arts et manufactures, les développements en séries des fonctions $\sin x$ et $\cos x$, nécessaires pour établir la formule d'Euler et ses conséquences, doivent pouvoir se déduire, par le procédé élémentaire, de l'inégalité

$$x - \sin x < \frac{x^3}{6}.$$

Le raisonnement est bien simple : le voici en quelques mots :

I. Considérons en premier lieu les séries alternées

$$U = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \dots + (-1)^n \frac{x^{2n}}{2n!} + (-1)^{n+1} \frac{x^{2n+2}}{(2n+2)!} + \dots$$

$$V = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \dots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + (-1)^{n+1} \frac{x^{2n+3}}{(2n+3)!} + \dots$$