SUR LES CARACTÈRES DE DIVISIBILITÉ

Autor(en): **Lebon, Ernest**

Objekttyp: **Article**

Zeitschrift: **L'Enseignement Mathématique**

Band (Jahr): **7 (1905)**

Heft 1: **L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE**

PDF erstellt am: **13.07.2024**

Persistenter Link: https://doi.org/10.5169/seals-8430

SUR LES CARACTÈRES DE DIVISIBILITÉ

Les démonstrations que l'on fait en Arithmétique pour trouver les caractères de divisibilité par 9 et par 11 peuvent être reproduites pour tout nombre, et céla a été fait pour quelques nombres ; dans ce qui suit, je propose une démonstration générale de ce mode de recherche des caractères de divisibilité.

En représentant par a, b, c, d,... les chiffres des unités, des dizaines, des centaines, des mille,... d'un nombre entier N, on peut écrire

$$(1) \qquad N = a + b \cdot 10 + c \cdot 10^2 + d \cdot 10^3 + \dots \; ;$$

et, en représentant par α un nombre entier positif ou négatif, on peut ainsi écrire tout nombre entier ν :

$$(2) \qquad \nu = 10 - \alpha \; .$$

Le nombre N a la forme d'un polynome entier en x, où $x = 10$, et le nombre ν a la forme du binome $x - \alpha$, où $x = 10$; donc le reste R_ν de la division algébrique de N par ν s'obtient en remplaçant 10 par α dans l'expression (1), ce qui donne

$$(3) \qquad R_\nu = a + b \cdot \alpha + c \cdot \alpha^2 + d \cdot \alpha^3 + \dots \; .$$

Voici comment on calcule rapidement les restes obtenus en divisant par ν les puissances successives de α. Soit ρ le reste de la division de α par ν. Le reste de la division par ν d'une puissance entière $p^{\text{ième}}$ de α peut s'obtenir en cherchant d'abord le reste ρ_1 de la division par ν de la puissance ρ^2, puis le reste ρ_2 de la division par ν du produit $\rho_1\rho$, ensuite le reste ρ_3 de la division par ν du produit $\rho_2\rho$, et ainsi de suite.

En effet, en représentant d'une manière générale par $R(D, d)$ le reste de la division de D par d, on peut écrire successivement :

$$R(\alpha^2, \nu) = R(\rho^2, \nu) = \rho_1,$$
$$R(\alpha^3, \nu) = R(\alpha^2, \alpha, \nu) = R(\rho_1 \rho, \nu) = \rho_2,$$
$$R(\alpha^4, \nu) = R(\alpha^3, \alpha, \nu) = R(\rho_2 \rho, \nu) = \rho_3,$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$R(\alpha^p, \nu) = R(\alpha^{p-1}, \alpha, \nu) = R(\rho_{p-2}\rho, \nu) = \rho_{p-1}.$$

Le caractère de divisibilité d'un nombre entier N divisé par un nombre entier ν peut être aisément déduit de ce qui précède, en remplaçant R_ν de l'expression (3) par $R(R_\nu, \nu)$ lorsque R_ν sera égal ou supérieur à ν.

Exemples.

I. — Quand $\nu = 4$, on a $\alpha = 6$, et l'on trouve

$$R_4 = a + b\,.\,2 + c\,.\,0 + d\,.\,0 + \ldots\,;$$

donc

$$R(N, 4) = R[(a + 2b), 4].$$

II. — Quand $\nu = 6$, on a $\alpha = 4$, et l'on trouve

$$R_6 = a + b\,.\,4 + c\,.\,4 + \ldots\,;$$

donc

$$R(N, 6) = R\left\{[a + 4(b + c + \ldots)], 6\right\}.$$

III. — Quand $\nu = 7$, on a $\alpha = 3$, et l'on trouve

$$R_7 = a + b\,.\,3 + c\,.\,2 + d\,.\,6 + e\,.\,4 + f\,.\,5 + g\,.\,1 + h\,.\,3 + \ldots\,;$$

retranchant $7(d + e + f + \ldots)$ de chaque membre de cette égalité, on obtient

$$R_7 - 7(d + e + f + \ldots)$$
$$= a\,.\,1 + b\,.\,3 + c\,.\,2 + d\,.\,(-1) + e\,.\,(-3) + f\,.\,(-2) + g\,.\,1 + \ldots\,;$$

de là on déduit que :

Le reste de la division d'un nombre par 7 est le même que le reste obtenu en divisant par 7 la somme algébrique des *produits des chiffres successifs du nombre, à partir de celui des unités, respectivement par les nombres*

$$1, 3, 2, \overline{1}, \overline{3}, \overline{2} \quad ; \qquad 1, 3, \ldots \; .$$

IV. — Quand $\nu = 8$, on a $\alpha = 2$, et l'on trouve

$$R_8 = a + b \,.\, 2 + c \,.\, 4 + d \,.\, 0 + e \,.\, 0 + \ldots \; ;$$

donc

$$R(N, 8) = R[(a + 2b + 4c), 8] \; .$$

V. — Quand $\nu = 11$, on a $\alpha = -1$, et l'on trouve

$$\begin{aligned} R_{11} &= a \,.\, 1 + b \,.\, (-1) + c \,.\, 1 + d \,.\, (-1) + e \,.\, 1 + \ldots \\ &= (a + c + e + \ldots) - (b + d + f + \ldots) \; ; \end{aligned}$$

donc

$$R(N, 11) = R[(\Sigma \text{ ch. ord. imp.} - \Sigma \text{ ch. ord. pair}), 11] \; .$$

VI. — Quand $\nu = 13$, on a $\alpha = -3$, et l'on trouve

$$R_{13} = a + b \,.\, (-3) + c \,.\, 9 + d \,.\, (-1) + e \,.\, 3 + f \,.\, (-9) + g \,.\, 1 + h \,.\, (-3) + \ldots \; ;$$

ajoutant l'expression $13(-c + f - \ldots)$ aux deux membres de cette égalité, on obtient

$$\begin{gathered} R_{13} + 13(-c + f - \ldots) \\ = a \,.\, 1 + b \,.\, (-3) + c \,.\, (-4) + d \,.\, (-1) + e \,.\, 3 + f \,.\, 4 + g \,.\, 1 + \ldots \; ; \end{gathered}$$

de là on déduit que :

Le reste de la division d'un nombre par 13 est le même que le reste obtenu en divisant par 13 la somme algébrique des produits des chiffres successifs du nombre, à partir de celui des unités, respectivement par les nombres

$$1, \overline{3}, \overline{4}, \overline{1}, 3, 4 \quad ; \qquad 1, \overline{3}, \ldots$$

VII. — Quand $\nu = 17$, on a $\alpha = -7$, et l'on trouve

$$\begin{aligned} R_{17} = a &+ b \,.\, (-7) + c \,.\, 15 + d \,.\, (-3) + e \,.\, 4 + f \,.\, (-11) + g \,.\, 9 \\ &+ h \,.\, (-12) + i \,.\, 16 + j \,.\, (-10) + k \,.\, 2 + l \,.\, (-14) + m \,.\, 13 \\ &+ n \,.\, (-6) + o \,.\, 8 + p \,.\, (-5) + q \,.\, 1 + r \,.\, (-7) + \ldots \; . \end{aligned}$$

On peut écrire

$$R_{17} + \text{mult. } 17 = a - 7b - 2c - 3d + 4e + 6f - 8g + 5h - i + 7j$$
$$+ 2k + 3l - 4m - 6n + 8o - 5p + q - 7r - \dots ;$$

de là on déduit que :

Le reste de la division d'un nombre par 17 est le même que le reste obtenu en divisant par 17 la somme algébrique des produits des chiffres successifs du nombre, à partir de celui des unités, respectivement par les nombres

$$1, \bar{7}, \bar{2}, \bar{3}, 4, 6, \bar{8}, 5; \bar{1}, 7, 2, 3, \bar{4}, \bar{6}, 8, \bar{5}; \qquad 1, 7, \dots$$

ERNEST LEBON (Paris).

SUR LA GÉOMÉTRIE ET LA TRIGONOMÉTRIE SPHÉRIQUES

Dans les pages suivantes je me propose d'établir les propriétés des figures sphériques — jusqu'aux formules fondamentales de la trigonométrie — sans jamais faire usage des théorèmes propres de la géométrie plane euclidienne [1]. Il me semble que ce ne soit pas un simple exercice de géométrie

[1] MM. NIEWENGLOWSKI et GÉRARD, dans leur *Traité de géométrie,* construisent la géométrie sphérique en empruntant aux développements précédents la seule proposition que la somme des deux côtés d'un triangle sphérique est plus grande que le troisième. Cependant c'est là faire un bien grand usage de la géométrie plane.

Que la géométrie et la trigonométrie sphériques soient indépendantes de l'hypothèse particulière sur les droites parallèles, c'est un fait bien connu. On peut aussi le faire ressortir aisément de l'article présent : il suffira — pour éviter toute difficulté relative à la géométrie riemanniene — de définir convenablement le segment et l'ordre : en admettant le *segment* comme *concept primitif* on dira, par exemple : « Deux segments d'une même droite ayant même extrémité A, ou bien sont l'un entièrement contenu dans l'autre, ou bien contiennent chacun des points extérieurs à l'autre. Dans le premier cas, on dit que les deux segments sont du même côté de A, dans le second qu'ils sont de côtés opposés par rapport à A. Si deux segments sont de côtés opposés par rapport à A, tout autre segment de la même droite, ayant A pour extrémité est du même côté que l'un et du côté opposé de l'autre. »