SUR LA GÉOMÉTRIE ET LA TRIGONOMÉTRIE SPHÉRIQUES

On peut écrire

$$\begin{aligned} R_{17} + \text{mult. } 17 = a - 7b - 2c - 3d + 4e + 6f - 8g + 5h - i + 7j \\ + 2k + 3l - 4m - 6n + 8o - 5p + q - 7r - \dots ; \end{aligned}$$

de là on déduit que :

Le reste de la division d'un nombre par 17 est le même que le reste obtenu en divisant par 17 la somme algébrique des produits des chiffres successifs du nombre, à partir de celui des unités, respectivement par les nombres

$$1, \bar{7}, \bar{2}, \bar{3}, 4, 6, \bar{8}, 5; \bar{1}, 7, 2, 3, \bar{4}, \bar{6}, 8, \bar{5}; \qquad 1, 7, \dots$$

Ernest Lebon (Paris).

SUR LA GÉOMÉTRIE ET LA TRIGONOMÉTRIE SPHÉRIQUES

Dans les pages suivantes je me propose d'établir les propriétés des figures sphériques — jusqu'aux formules fondamentales de la trigonométrie — sans jamais faire usage des théorèmes propres de la géométrie plane euclidienne [1]. Il me semble que ce ne soit pas un simple exercice de géométrie

[1] MM. Niewenglowski et Gérard, dans leur *Traité de géométrie,* construisent la géométrie sphérique en empruntant aux développements précédents la seule proposition que la somme des deux côtés d'un triangle sphérique est plus grande que le troisième. Cependant c'est là faire un bien grand usage de la géométrie plane.

Que la géométrie et la trigonométrie sphériques soient indépendantes de l'hypothèse particulière sur les droites parallèles, c'est un fait bien connu. On peut aussi le faire ressortir aisément de l'article présent : il suffira — pour éviter toute difficulté relative à la géométrie riemanniene — de définir convenablement le segment et l'ordre : en admettant le *segment* comme *concept primitif* on dira, par exemple : « Deux segments d'une même droite ayant même extrémité A, ou bien sont l'un entièrement contenu dans l'autre, ou bien contiennent chacun des points extérieurs à l'autre. Dans le premier cas, on dit que les deux segments sont du même côté de A, dans le second qu'ils sont de côtés opposés par rapport à A. Si deux segments sont de côtés opposés par rapport à A, tout autre segment de la même droite, ayant A pour extrémité est du même côté que l'un et du côté opposé de l'autre. »

Questioni che riguardano la geometria elementare, M. Bonola donne aussi une démonstration de la proposition que la somme des angles d'un triangle sphérique est plus grande que deux angles droits, en ayant cependant recours à la notion extensive de l'aire du triangle, qu'il est certainement utile d'éviter. Au contraire, dès le 1895, M. Mansion a donné, dans un supplément de *Mathesis*, une construction de la Géométrie et de la Trigonométrie sphériques, indépendante des hypothèses sur les droites parallèles et sur l'infinité de la droite. Si l'on confronte avec celle-ci la nouvelle construction on verra, je l'espère, que l'intérêt méthodologique n'est nullement diminué.

Plaisance, 12 Février 1905.

LES COORDONNÉES PROJECTIVES SUR LA SPHÈRE

1. Des coordonnées sphériques non-homogènes ont été introduites par C. Gudermann [1], qui, pour déterminer la position d'un point M par rapport à un triangle sphérique VXY dont deux côtés VX et VY sont droits, mène par le point en question les droites sphériques XM et YM. La première rencontre le côté VY en Q, la seconde rencontre le côté VX en P. Ce sont les tangentes trigonométriques des arcs VQ et VP, qu'il considère comme les coordonnées du point M *(Axenkoordinate)*. Quelquefois il emploie aussi un système de coordonnées polaires: l'arc VM et l'angle XVM, qu'il appelle les coordonnées centrales du point M *(Centralkoordinate)*. Les problèmes ordinaires de la droite, des coniques, de la cycloïde et de la chaînette sphériques qui sont traités dans ces systèmes de coordonnées donnent lieu à des déductions et des formules d'une extrême longueur, ce qui explique suffisamment l'oubli dans lequel les recherches de Gudermann sont tombées.

[1] C. Gudermann. *Grundriss der analytischen Sphärik*. Köln, 1830.

générale, mais qu'il en ressort beaucoup de lumière sur certains théorèmes connus de la géométrie sphérique.

Les figures seront toujours décrites sur une sphère fixe : si A et B sont deux points de la sphère, le *grand-arc* AB sera l'arc de grand-cercle compris entre A et B et plus petit qu'une demi-circonférence. Deux points d'un grand-cercle seront du même côté d'un point donné sur ce cercle, s'ils appartiennent à la même demi-circonférence ayant ce point comme origine.

I. *Géométrie sphérique.*

1. Soit BC un arc de grand-cercle, A un de ses pôles. L'angle ABC est droit — Soit C' le point opposé de C et D un point de la demi-circonférence CAC' ; l'angle DBC sera plus grand ou plus petit que ABC selon que DC est plus grand ou plus petit que AC. Donc *dans un triangle rectangle l'angle opposé à l'un des côtés de l'angle droit est plus grand ou plus petit qu'un droit en même temps que ce côté est plus grand ou plus petit qu'un cadrant.*

On déduit que dans un triangle rectangle la somme des trois angles est supérieure à deux angles droits. Pas de doute, en effet, si un des côtés de l'angle droit est plus grand qu'un cadrant : l'angle opposé est plus grand qu'un angle droit, et la somme de cet angle avec l'angle droit du triangle est déjà supérieure à deux droits.

Si ABC est un triangle, rectangle en A, dont les côtés AB AC sont moindres qu'un cadrant, soit D le milieu de BC et soit D_1 le pied du grand-arc perpendiculaire de D à BA. Sur le cercle DD_1 que l'on porte $DD_2 = DD_1$. Les deux triangles BDD_1, CDD_2 sont égaux, ayant les angles en D et les côtés qui les forment égaux : donc l'angle CD_2D est droit et le cercle CD_2 passe par les pôles de DD_1. Soit P le pôle qui est, par rapport à D_1, du même côté que B : PA sera plus grand qu'un cadrant et par suite PCA obtus. Mais $PCB = CBA$; donc $CBA + BCA + CAB > 2$ angles droits.

Tout triangle ABC a au moins deux angles de même espèce (obtus ou aigus) : soient A et B. Le demi-grand-cercle passant par C et perpendiculaire à AB, est divisé par C en deux arcs dont l'un (plus grand ou plus petit qu'un cadrant selon que A et B sont obtus ou aigus) est alors intérieur à A et à B et par suite au triangle. Il décomposera le triangle en deux triangles rectangles; dans chacun la somme des angles est supérieure à deux droits; il s'ensuit que dans *tout triangle sphérique la somme des trois angles est supérieure à deux angles droits*.

En décomposant un polygone sphérique en triangles on étend la proposition aux polygones, de la manière connue.

2. En appliquant la proposition au triangle polaire d'un triangle donné on déduit que *la somme des trois côtés d'un triangle sphérique est inférieure à quatre angles droits*. Si alors ABC est un triangle sphérique, et A' est le point opposé de A, de la relation

$$A'B + A'C + BC < 4 \text{ angles droits},$$

on tire que

$$BC < AB + AC,$$

c'est-à-dire que *dans un triangle un côté est plus petit que la somme des deux autres*. Les théorèmes sur les relations entre les côtés et les angles opposés, sur les arcs perpendiculaires et obliques d'un point à un grand-cercle, etc., se démontrent alors suivant les méthodes ordinaires. Nous rappelons, en particulier, l'observation suivante que nous devons appliquer: Soient AB, AC deux arcs, égaux ou moindres qu'un cadrant, et formant entr'eux un angle aigu. Soit P le pôle de AB du côté de AC, et supposons que PB passe par C, soit PC_1B_1 un grand-arc, qui rencontre AB et AC en B_1 et C_1 respectivement. On a $PB_1 = PB = 1$ cadrant, $PC_1 > PC$; donc $B_1C_1 < BC$; c'est-à-dire: *dans un triangle rectangle dont les côtés sont moindres qu'un cadrant et dont un angle aigu est invariable, les trois côtés croissent et décroissent ensemble*.

3. Nous appelons AIRE D'UN POLYGONE *l'arc équatorial d'un fuseau dont l'angle soit égal à la différence entre la somme*

des angles du polygone et autant de fois deux angles droits qu'il a de côtés, moins deux [1].

Si l'on divise un côté d'un polygone en deux par un point, et on considère ce point comme sommet d'un angle égal à deux droits, l'aire du polygone reste inaltérée. Si deux polygones s'adaptent l'un à l'autre le long d'une ligne brisée formée de k côtés, k-1 sommets intérieurs et 2 sommets extrêmes (si sur l'un des polygones un de ces sommets est un point d'un côté, on le considérera comme sommet d'un angle du polygone égal à deux droits), leur ensemble est un nouveau polygone qui a autant de côtés que la somme des nombres des côtés des deux polygones donnés diminuée de 2k, et dans lequel la somme des angles est égale à la somme des angles de ces polygones diminuée de $2(k-1) \times 2$ droits. Il s'ensuit que l'aire du polygone total est la somme des aires des deux polygones. De là, *si un polygone est décomposé d'une manière quelconque en polygones partiels, son aire est égale à la somme des aires de ces polygones.*

4. Considérons sur la sphère un cercle de centre O ; soit ABC... un polygone régulier inscrit (fig. 1) et MN... le polygone circonscrit qui touche la circonférence en A, B, C,... Soient A_1, B_1,.., les points où les demi-grand-cercles partant de O et contenant A, B,... rencontrent le grand-cercle de centre O. Les arcs AB, BC,... sont plus petits, respectivement, que A_1B_1, B_1C_1,... (d'après le n° 2). Le périmètre du polygone ABC... est donc plus petit que la circonférence d'un grand cercle. Si alors on développe ce polygone le long d'un grand cercle et on transporte avec ses côtés les triangles ABM, BCN,... compris entre le polygone inscrit et le polygone circonscrit, on voit que la somme de ces triangles est toute intérieure à deux fuseaux ayant l'angle égal à MAB. La somme des aires de ces triangles est donc inférieure à la somme des aires de ces fuseaux, c'est-à-dire à quatre fois l'arc équatorial de l'un d'eux.

[1] Nous évitons ainsi la question de l'équivalence entre le polygone et le fuseau au point de vue de la composition par réunion de parties égales. Cette question a d'ailleurs déjà été résolue fort élégamment par l'affirmative par M. Gérard. V. Thèse : *Sur la géométrie non-euclidienne*, p. 105, et Niewenglowski et Gérard : *Géométrie dans l'espace*, p. 239.

Que l'on observe maintenant que MAB + BAO = 1 angle droit, tandis que, dans le triangle rectangle AOM_1, BAO + AOM > 1 angle droit; il résulte MAB < AOM. Si donc on fait augmenter suffisamment le nombre des côtés du polygone ABC..., on peut rendre l'angle MAB plus petit que tout angle assigné et par suite la somme des aires des triangles ABM, BCN,... plus petite que toute aire assignée.

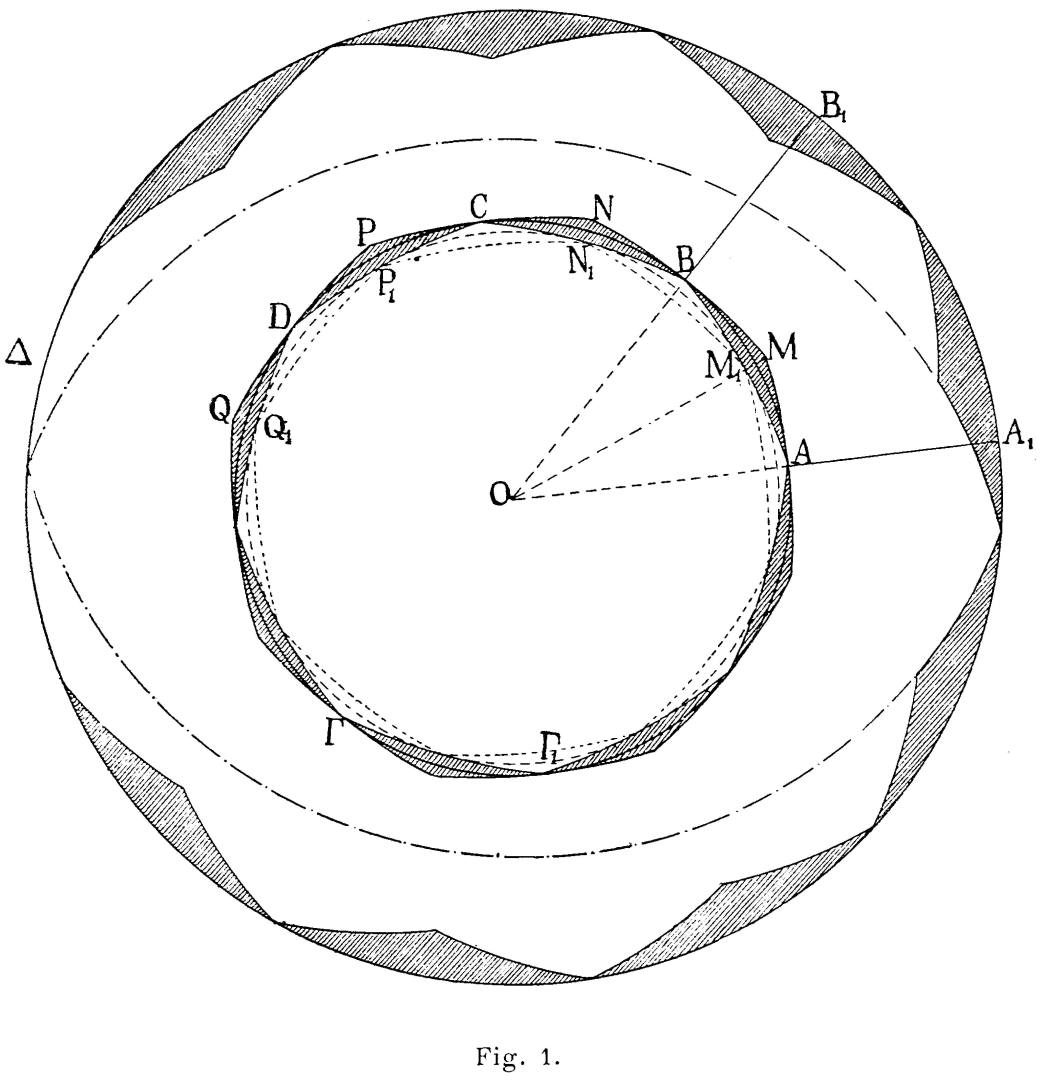

Fig. 1.

Il s'ensuit que les aires des polygones réguliers inscrits dans le cercle croissant avec le nombre des côtés, et les aires des polygones circonscrits décroissant en même temps, tendent vers une limite commune : nous l'appellerons *l'aire de la calotte limitée par le cercle.* La différence entre la circonférence de grand cercle et cette limite sera *l'aire de la zone comprise entre le cercle donné et le grand-cercle de même pôle.* Elle est la limite commune à la somme des aires des quadrilatères tels que ABB_1A_1 et à la somme des aires des pentagones tels que $AMBB_1A_1$.

5. Formons la figure polaire de celle du numéro précédent. Nous obtenons un cercle de centre O, ayant pour rayon le complément du rayon du cercle donné, et un système de polygones réguliers inscrits et circonscrits à celui-ci. Le périmètre de chacun de ces polygones est la différence entre une circonférence de grand-cercle et l'aire du polygone polaire. Les conclusions du numéro précédent montrent alors que *les périmètres des polygones réguliers inscrits et circonscrits à un cercle tendent vers une limite commune lorsque le nombre de leurs côtés croît indéfiniment.* Il est naturel d'appeler cette limite la *longueur de la circonférence* du cercle considéré : elle est égale à la différence entre la circonférence de grand-cercle et l'aire de la calotte limitée par le cercle polaire ; donc (d'après le n° 4) *la longueur d'une circonférence est égale à l'aire de la zone comprise entre le cercle polaire et le grand-cercle ayant même centre*[1].

II. *Trigonométrie sphérique et goniométrie.*

6. Si ρ est un arc de grand-cercle *on appelle* $\sin\rho$ *la longueur de la circonférence*[2] *de rayon* ρ.

Le sinus d'un arc est une fonction croissante et continue de cet arc. Rappelons en effet (n° 5) que $\sin\rho$ représente aussi l'aire d'une zone qui a pour base un grand-cercle et pour hauteur ρ ; on déduit immédiatement qu'il est une fonction croissante de ρ. Soit Γ la base mineure de la zone ; considérons le polygone régulier ABC... inscrit dans Γ (fig. 1), le cercle Γ_1 inscrit dans ce polygone et le polygone M_1N_1... inscrit dans Γ_1, dont les sommets sont les points de contact de Γ_1

---

[1] A comparer avec le théorème connu, de la proportionalité entre les zones et leur hauteur.

[2] On doit remarquer qu'il n'a été dit nulle part quel était le rayon de la sphère ; on a dit seulement qu'on opérait sur une sphère fixe. Quand on reste dans l'hypothèse euclidienne, que l'on prenne la longueur de ce rayon égale à $\frac{1}{2\pi}$, et l'on aura l'accord complet entre notre définition du sinus et l'ordinaire.

avec ABC... La différence entre la zone considérée de hauteur ρ et la zone limitée par Γ_1 et le même grand-cercle est la zone comprise entre Γ et Γ_1 et est moindre que la différence entre les aires des polygones MNP..., $M_1N_1P_1$... l'un circonscrit à Γ, l'autre inscrit dans Γ_1. Cette différence est la somme des triangles ABM, BCN,..., M_1N_1B, M_1P_1C,... et on voit, comme au n° 4, qu'elle devient aussi petite que l'on veut si l'on augmente suffisamment le nombre des côtés de ABC...

La différence entre les aires de deux zones de hauteurs ρ et $\rho + \Delta\rho$ peut donc devenir aussi petite que l'on veut; de là, et de l'observation que $\sin\rho$ est une fonction croissante, on déduit qu'elle est aussi continue.

7. Soit Γ un cercle de centre O, Δ le grand-cercle concentrique, γ le cercle polaire de Γ, ρ la hauteur de la zone $(\Gamma\Delta)$. Appelons, comme d'usage, $\frac{\pi}{2}$ le cadrant ; la hauteur de la zone $(\gamma\Delta)$ est $\frac{\pi}{2}-\rho$. Soit Γ_1, un cercle de centre O et de rayon $\frac{\pi}{2}-(\rho+\delta\rho)$ de sorte que la zone $(\Gamma_1\Delta)$ ait la hauteur $\rho + \delta\rho$ et soit γ_1 le cercle polaire de Γ_1. Nous voulons comparer la différence des aires des zones $(\Gamma\Delta)$, $(\Gamma_1\Delta)$ avec celle des zones $(\gamma\Delta)$, $(\gamma_1\Delta)$, c'est-à-dire les aires des zones $(\Gamma\Gamma_1)$, $(\gamma\gamma_1)$.

Ces deux zones ont même hauteur $\delta\rho$. Circonscrivons à Γ et à Γ_1 deux polygones réguliers, de même nombre de côtés, et ayant les sommets sur les mêmes grands-arcs passant par O. Nous pouvons supposer les côtés de ces polygones si petits que: 1° les aires comprises entre Δ et ces polygones soient approximées autant que l'on veut aux aires des deux zones $(\Gamma\Delta)$ $(\Gamma_1\Delta)$, et par conséquent l'aire comprise entre les polygones aussi peu différente que l'on veut de l'aire de la zone $(\Gamma\Gamma_1)$; 2° si l'on circonscrit à γ un polygone dont tous les côtés, sauf un au plus, soient égaux aux côtés du polygone circonscrit à Γ, et à γ_1 le polygone qui a les sommets sur les mêmes rayons par O que le précédent, l'aire comprise entre les deux polygones diffère encore aussi peu que l'on veut de l'aire de la zone $(\gamma\gamma_1)$, même si on néglige la partie comprise entre les deux côtés différents et les arcs passant par O et par leurs sommets. Les rayons sortant de O et passant par les sommets des deux figures polygonales qu'on substitue ainsi aux zones $(\Gamma\Gamma_1)$, $(\gamma\gamma_1)$ les décomposent en trapèzes isoscèles, tous de même hauteur $\delta\rho$, et avec une base égale; l'autre base est plus grande que celle-ci pour les trapèzes relatifs à $(\gamma\gamma_1)$, plus petite pour les trapèzes relatifs à $(\Gamma\Gamma_1)$. Si donc on pense que l'on transporte chaque trapèze relatif à $(\Gamma\Gamma_1)$ sur un trapèze relatif à $(\gamma\gamma_1)$ on voit que *le rapport entre les aires des deux figures polygonales relatives à* $(\Gamma\Gamma_1)$ *et à* $(\gamma\gamma_1)$ *est plus petit que le rapport des longueurs des périmètres des polygones circonscrits à* Γ *et à* γ.

On peut répéter les mêmes considérations en choisissant les côtés du polygone circonscrit à γ_1 égaux aux côtés du polygone circonscrit à Γ_1; alors ce sont les trapèzes relatifs à la zone $(\Gamma\Gamma_1)$ qui sont plus grands que les trapèzes relatifs à la zone $(\gamma\gamma_1)$ et par suite *le rapport entre les aires des deux figures polygonales relatives à* $(\Gamma\Gamma_1)$ *et à* $(\gamma\gamma_1)$ *est plus grand que le rapport des longueurs des périmètres des polygones circonscrits à* Γ_1 *et à* γ_1.

Faisons croître indéfiniment le nombre des côtés des polygones considérés; nous aurons à la limite que *le rapport entre les aires des deux zones* $(\Gamma\Gamma_1)$, $(\gamma\gamma_1)$ *est compris entre le rapport des longueurs des circonférences* Γ, γ *et le rapport des longueurs des circonférences* Γ_1, γ_1.

Supposons enfin que $\delta\rho$ diminue indéfiniment; à cause de la continuité du sinus (n° 6) les longueurs de Γ_1, γ_1 tendent vers les longueurs de Γ, γ; on a donc à la limite

$$\lim_{\delta\rho = o} \frac{\text{aire } (\Gamma\Gamma_1)}{\text{aire } (\gamma\gamma_1)} = \frac{\text{long. } \Gamma}{\text{long. } \gamma} = \frac{\text{aire } (\gamma\Delta)}{\text{aire } (\Gamma\Delta)},$$

c'est-à-dire

$$\lim_{\delta\rho = o} \frac{\delta \text{ aire } (\Gamma\Delta)}{\delta \text{ aire } (\gamma\Delta)} = \frac{\text{aire } (\gamma\Delta)}{\text{aire } (\Gamma\Delta)},$$

ou bien encore

$$\lim_{\delta\rho = o} \frac{\delta \sin \rho}{\delta \sin \left(\frac{\pi}{2} - \rho\right)} = \frac{\sin \left(\frac{\pi}{2} - \rho\right)}{\sin \rho}.$$

Si donc x et y sont les sinus de deux arcs complémentaires, ils satisfont à l'équation différentielle

$$\left|\frac{\partial x}{\partial y}\right| = \frac{y}{x},$$

On détermine mieux cette équation quand on observe que x décroît lorsque y croît ; donc

$$\frac{\partial x}{\partial y} = -\frac{y}{x}.$$

ou bien

$$x\partial x + y\partial y = 0$$

et, en intégrant,

$$x^2 + y^2 = \text{const.}$$

On détermine la constante en considérant le cas de $\rho = \pi$. Alors Γ se réduit à O, γ coïncide avec Δ et l'on voit que la constante vaut 1.

$$x^2 + y^2 = 1.$$

C'est la formule fondamentale

$$\sin^2\rho + \cos^2\rho = 1. \tag{1}$$

8. Soit encore Γ un cercle de centre O, Δ le grand-cercle concentrique, et soit Γ_1 un cercle de centre O intérieur à la zone $(\Gamma\Delta)$ (fig. 2). Soit MNP... un polygone régulier circonscrit à Γ, ABC... ses points de contact. Prolongeons les arcs AM, MBN, NCP,... tous du même côté jusqu'à la rencontre de Δ, respectivement en A_1, B_1, C_1,... et de Γ_1 en A_2, B_2, C_2,... L'aire de la zone $(\Gamma\Delta)$ est, d'après le n° 4, la limite de la somme des triangles MA_1B_1, NB_1C_1,... lorsque le nombre des côtés du polygone croît indéfiniment : d'autre côté l'aire de la zone $(\Gamma_1\Delta)$ est la somme des aires $A_2A_1B_1B_2$, $B_2B_1C_1C_2$,...

Avec les points M, N, P,... comme centres décrivons les arcs $B_2A'_2$, $C_2B'_2$,... et les arcs $A_1B'_1$, $B_1C'_1$,... ; observons que toutes les figures contenues dans les triangles MA_1B_1, NB_1C_1,... sont égales entre elles ; nous obtenons

$$\frac{\text{aire } (\text{MNP}\ldots, \Delta)}{\text{aire } (\Gamma_1, \Delta)} < \frac{\text{aire } (MA_1B'_1)}{\text{aire } (A'_2A_1B'_1B_2)} = \frac{\Sigma \text{ aire } (MA_1B'_1)}{\Sigma \text{ aire } (A'_2A_1B'_1B_2)}.$$

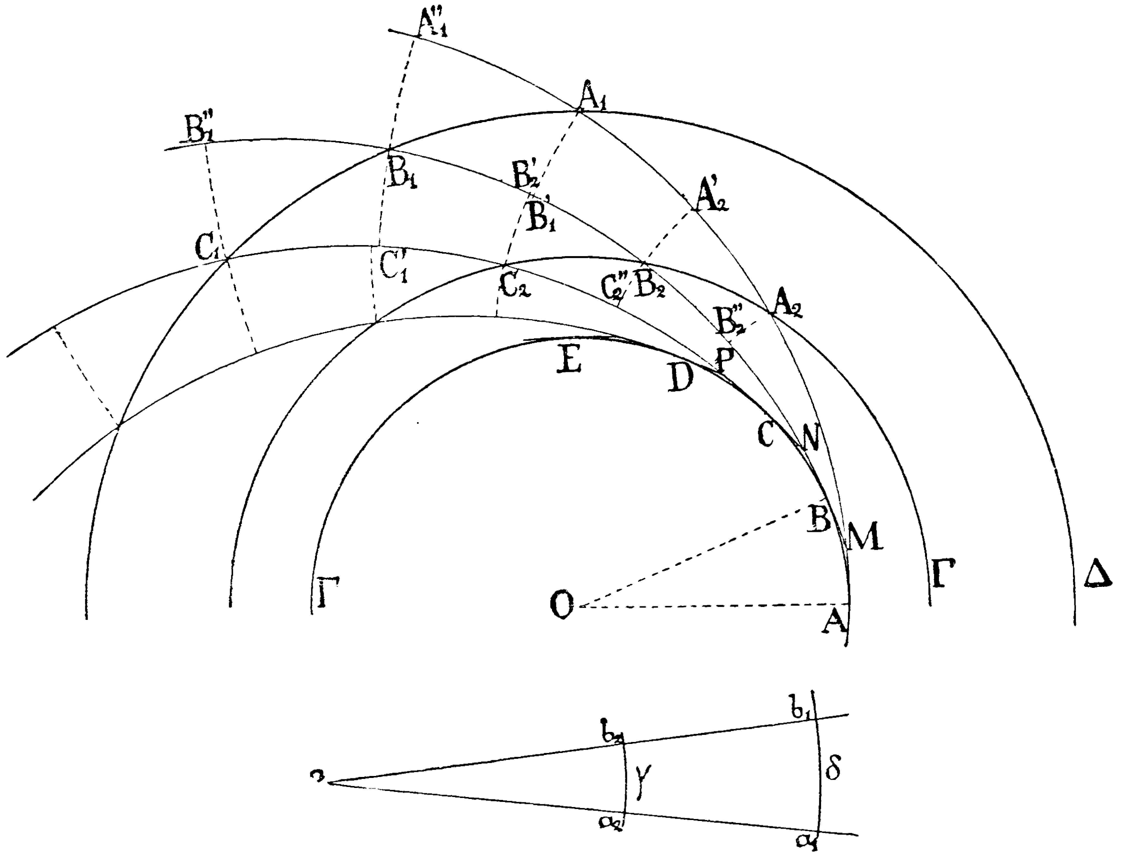

Fig. 2.

Avec les mêmes centres décrivons les arcs $A_2B''_2$, $B_2C''_2$.... et les arcs $B_1A''_1$, $C_1B''_1$... ; nous obtenons de même

$$\frac{\text{aire }(MNP\ldots,\ \Delta)}{\text{aire }(\Gamma_1,\ \Delta)} > \frac{\text{aire }(MA''_1B_1)}{\text{aire }(A_2A''_1B_1B''_2)} = \frac{\Sigma\text{ aire }(MA''_1B_1)}{\Sigma\text{ aire }(A_2A''_1B_1B''_2)}\,.$$

Les seconds membres de ces inégalités ont même limite lorsque le nombre des côtés du polygone croît indéfiniment : en effet, l'angle A_1MB_1 a pour mesure l'arc qu'on doit enlever à l'arc équatorial de AOB pour avoir l'aire du quadrilatère AOBM. Il est donc $<$ AOB et par suite la somme des aires $A_2A'_2B_2B''_2$, est plus petite que la zone dont les deux bases ont pour rayons MA_2 et MB_2 et dont la hauteur est 2 AM. Elle tend donc à zéro avec cette hauteur (n° 6); de même la somme des aires $A_1A''_1B_1B''_1$ tend vers 0.

Alors

$$\frac{\text{aire }(\Gamma,\ \Delta)}{\text{aire }(\Gamma_1,\ \Delta)} = \lim \frac{\text{aire }(MA_1B'_1)}{\text{aire }(A'_2A_1B'_1B_2)} = \lim \frac{\text{aire }(MA''_1B_1)}{\text{aire }(A_2A''_1B_1B''_2)}\,.$$

Remarquons que AA_1, BB_1,.... sont égaux chacun à un cadrant ; considérons alors la figure constituée d'un grand-cercle δ et d'un cercle concentrique γ de rayon AA_2 : pour plus d'évidence considérons de cette figure seulement la partie comprise entre deux rayons formant un angle égal à A_1MB_1 : soit $oa_1b_1a_2b_2$: on voit immédiatement que

$$\frac{\text{aire }(MA_1B'_1)}{\text{aire }(A'_2A_1B'_1B_2)} > \frac{\text{aire }(oa_1b_1)}{\text{aire }(a_2a_1b_1b_2)} > \frac{\text{aire }(MA''_1B_1)}{\text{aire }(A_2A''_1B_1B''_2)} .$$

Or

$$\frac{\text{aire }(oa_1b_1)}{\text{aire }(a_2a_1b_1b_2)} = \frac{\text{aire hémisphère}}{\text{aire }(\gamma\delta)} = \frac{1}{\text{aire }(\gamma\delta)} .$$

Donc enfin, en rapprochant ces égalités des précédentes :

$$\frac{\text{aire }(\Gamma\Delta)}{\text{aire }(\Gamma_1\Delta)} = \frac{1}{\text{aire }(\gamma\delta)} .$$

Appelons ρ la hauteur de $(\Gamma\Delta)$, ρ_1 celle de $(\Gamma_1\Delta)$; cette égalité peut s'écrire

$$\frac{\sin\rho}{\sin\rho_1} = \frac{1}{\sin A_1A_2} .$$

9. Soit ABC un triangle rectangle (fig. 3), C son angle droit; soit Δ le grand-cercle de centre A, et soient Γ, Γ_1 les cercles de centre A passant par C et par B. Appelons a, b, c les côtés du triangle, opposés aux sommets A, B, C. Nous pouvons appliquer la formule précédente, où ρ, ρ_1 et A_1A_2 auront respectivement les valeurs $\frac{\pi}{2} - b$, $\frac{\pi}{2} - c$, $\frac{\pi}{2} - a$;

donc $\quad \dfrac{\cos b}{\cos c} = \dfrac{1}{\cos a}$.

ou bien

$$\cos c = \cos a \cos b . \qquad (2)$$

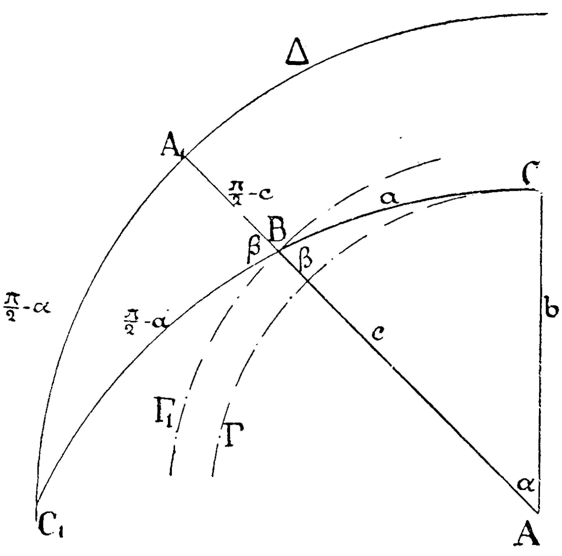

Fig. 3.

C'est la formule fondamentale pour les triangles rectangles.

Soient A_1 et C_1 les points de rencontre avec Δ des demi grands-cercles qui projettent B de A et de C; appelons α' β les mesures des angles A et B dans le triangle ABC; dans le triangle A_1BC_1 on a:

$$A_1C_1 = \frac{\pi}{2} - \alpha,\ A_1B = \frac{\pi}{2} - c,\ BC_1 = \frac{\pi}{2} - a,\ \text{angle } B = \beta.$$

En appliquant la formule (2) à ce triangle on obtient donc

$$\sin a = \sin c \sin \alpha, \tag{3}$$

et, en appliquant au même triangle cette nouvelle formule (3),

$$\cos \alpha = \cos a \sin \beta. \tag{4}$$

Dans les formules (2) (3) (4) se résume toute la trigonométrie des triangles rectangles. D'après des procédés connus on en tire encore toute entière la trigonométrie sphérique, pourvu que l'on possède la formule pour la somme des arcs. C'est cette formule que nous allons maintenant nous procurer.

10. Il est connu qu'il suffit de l'établir dans l'hypothèse que la somme des arcs soit $< \frac{\pi}{2}$. Soit alors ABC un triangle rectangle en C et soit CD sa hauteur (fig. 4). Posons $AD = a$, $BD = b$, $AC = m$, $BC = n$, $CAB = \alpha$, $CBA = \beta$, $ACD = \gamma$ et, par conséquence, $BCD = \frac{\pi}{2} - \gamma$. En appliquant les formules (3) et (4) aux triangles ABC, ACD, BCD, on obtient

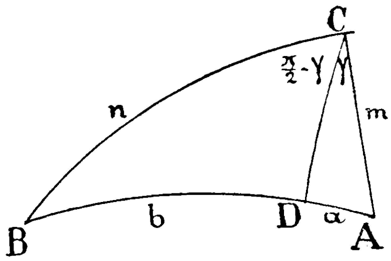

Fig. 4.

$$\sin(a+b) = \frac{\sin n}{\sin \alpha} = \frac{\sin m}{\sin \beta},$$

$$\sin a = \sin m \sin \gamma, \qquad \sin b = \sin n \cos \gamma$$

$$\cos a = \frac{\cos \gamma}{\sin \alpha}, \qquad \cos b = \frac{\sin \gamma}{\sin \beta};$$

d'où

$$\sin a \cos b = \frac{\sin m}{\sin \beta} \sin^2\gamma = \sin (a + b) \sin^2\gamma$$

$$\sin b \cos a = \frac{\sin n}{\sin \alpha} \cos^2\gamma = \sin (a + b) \cos^2\gamma$$

et, à cause de la formule (1),

$$\sin a \cos b + \sin b \cos a = \sin (a + b). \qquad (5)$$

C'est la formule pour la somme des arcs : afin que sa démonstration soit généralement valable, il suffit de remarquer que, par suite de la continuité du sinus (nº 6), il existe toujours un triangle rectangle dans lequel la hauteur abaissée du sommet de l'angle droit sur l'hypoténuse divise celle-ci en deux segments donnés (dont la somme soit $< \frac{\pi}{2}$). Des formules du triangle rectangle, en effet, on tire aisément que, les lettres conservant les mêmes significations que ci-dessus, on a, dans le triangle rectangle ABC,

$$\operatorname{tg} AD = \operatorname{tg} AB \cos^2\alpha.$$

Or de la continuité du sinus il suit immédiatement aussi la continuité de la tangente et du cosinus : si donc AB restant constant, on fait croître avec continuité α de 0 à $\frac{\pi}{2}$, AD variera avec continuité entre AB et 0 et passera par toute valeur, arbitrairement assignée, de $a <$ AB.

Beppo Levi (Plaisance, Italie).

P. S. — Cet article fut envoyé à la rédaction en août 1904. Tout récemment a paru dans les *Mathematischen Annalen* (Bd. 60) une note de M. Dehn où l'auteur donne une démonstration nouvelle de l'équivalence par réunion de parties égales des polygones ayant même excès sphérique, indépendamment du postulatum de la continuité.

A cette occasion je donne encore quelques autres références bibliographiques, dont je n'ai eu connaissance qu'après avoir corrigé les épreuves de l'article. Dans les *Collectanea* de M. Enriques :