VECTEURS RELATIFS A UNE COURBE

Autor(en): **Monnet, Georges**

Objekttyp: **Article**

Zeitschrift: **L'Enseignement Mathématique**

Band (Jahr): **7 (1905)**

Heft 1: **L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE**

PDF erstellt am: **13.07.2024**

Persistenter Link: https://doi.org/10.5169/seals-8434

de cette hyperbole fera, en général, avec x et y deux angles inégaux. Le point R′ sera dans l'un, le point Q′ dans l'autre de ces angles. On choisit de deux points R′ et Q′ celui qui est dans l'angle *plus grand* (c'est la moitié de l'angle asymptotique obtus), et on mène par lui (R′) une parallèle à l'axe (x) laquelle est un côté de cette angle même. La parallèle coupe l'autre axe (y) en un point R_0. On décrit de ce point comme centre avec le rayon étant égal à la distance du point R_0 de l'intersection N des droites y et R′Q′ un arc de cercle qui coupe l'autre axe (x) en un point A_1. La longueur OA_1 est la *grandeur* de l'axe OB′ de l'hyperbole situé sur la direction y.

On obtient la grandeur de l'axe sur la direction x, si l'on mène par B′ une parallèle à la droite R′Q′ et qu'on détermine le point A′ commun à cette droite et à x.

La longueur OB′ sera le demi-axe *réel* ou *imaginaire* selon que l'hyperbole passe réellement par Q′ ou par R′, parce que deux hyperboles conjuguées ont les *mêmes* longueurs des axes.

Je crois qu'en raison de la simplicité de cette construction on pourrait en faire usage dans l'enseignement.

G. Majcen (Agram).

VECTEURS RELATIFS A UNE COURBE

(Application de la Méthode de Grassmann.)

Soient un point P et un vecteur I, tous deux fonction d'un paramètre λ. Lorsque λ varie, le segment PI décrit une surface réglée ; cherchons la condition pour qu'elle soit développable.

On doit avoir, en dérivant par rapport à λ

$$P'II' = 0 \quad . \tag{1}$$

Posons (T, N, B étant les vecteurs unitaires des directions principales)

$$I = xT + yN + zB \quad ,$$

$$I' = \left(x' - \frac{\nu y}{\rho}\right)T + \left(y' + \frac{\nu x}{\rho} + \frac{\nu z}{\tau}\right)N + \left(z' - \frac{\nu z}{\tau}\right)B \quad ,$$

$$\nu = \frac{ds}{d\lambda} \quad .$$

La condition (1) devient

$$P'II' = TNB \begin{vmatrix} x & y & z \\ x' - \frac{\nu y}{\rho} & y' + \frac{\nu x}{\rho} + \frac{\nu z}{\tau} & z' - \frac{\nu y}{\tau} \\ \nu & 0 & 0 \end{vmatrix} = 0 \quad .$$

Or TNB $\neq$ o, donc le déterminant doit être nul; on peut l'écrire

$$(2) \qquad \Delta = \nu \begin{vmatrix} y & z \\ y' + \frac{\nu x}{\rho} + \frac{\nu z}{\tau} & z' - \frac{\nu y}{\tau} \end{vmatrix} = 0 \quad .$$

D'une façon générale, I étant donné par ses coordonnées, on conservera Δ sous la forme précédente. Pour les applications géométriques que nous avons en vue, il est souvent plus simple de lui donner la forme suivante, due à M. Burali-Forti, et dans laquelle 1° le vecteur I est unitaire et défini par son angle φ avec PNB et l'angle ψ de sa projection sur le plan PNB avec N ; 2° $\lambda = s$, arc décrit par P.

$$I = \sin\varphi \,.\, T + \cos\varphi\cos\psi \,.\, N + \cos\varphi\sin\psi \,.\, B \quad .$$

Tous calculs faits Δ devient

$$(3) \qquad \Delta = \psi'\cos^2\psi - \frac{\sin\varphi\cos\varphi\sin\psi}{\rho} - \frac{\cos^2\varphi}{\tau} \quad .$$

Pour discuter la condition $\Delta = 0$ nous allons examiner divers cas particuliers en faisant certaines hypothèses sur la valeur des coordonnées de I. Sous la forme (2) nous supposerons toujours $\nu \neq 0$, car $\nu = 0$ est un cas limite où PI décrit un cône.

Vecteur dans le plan osculateur. — $\psi = 0$.

$$\Delta = -\frac{\cos^2\varphi}{\tau} = 0 .$$

Pour $\cos\varphi = 0$, I est dirigé suivant la tangente, la surface est développable par définition.

Si $\cos\varphi \neq 0$ il faut $\frac{1}{\tau} = 0$, la courbe est plane et on a le *théorème :*

Lorsque un vecteur constamment situé dans le plan osculateur et différent de la tangente décrit une surface développable, la courbe est plane.

Le *corollaire* suivant est immédiat:

Lorsque une ligne géodésique est de courbure, elle est plane.

La normale à la surface est dans le plan osculateur à la courbe puisqu'elle est géodésique, elle décrit une surface développable puisque la ligne est de courbure donc la courbe est plane.

En Mécanique ce théorème trouve son application à deux reprises : dans l'étude du mouvement d'un point mobile et dans celle de l'équilibre d'un fil. On sait en effet que l'accélération du point dans un cas, la force agissante dans l'autre, sont situées dans le plan osculateur. Supposons qu'il s'agisse de forces centrales, il résulte du théorème précédent que la courbe décrite par le point ou affectée par le fil est plane.

Appelons *segment tangentiel* un segment dirigé suivant la tangente au point A. Il est de la forme

$$a = \mathrm{A}x\mathrm{T} .$$

Dérivons

$$a' = \mathrm{A}'x\mathrm{T} + \mathrm{A}(x\mathrm{T})' = \mathrm{A}(x\mathrm{T})' .$$

La dérivée d'un segment tangentiel est un segment. Son vecteur est le dérivé du segment primitif. Ce vecteur est

$$(x\mathrm{T})' = x'\mathrm{T} + \frac{\nu x}{\rho}\mathrm{N} . \tag{4}$$

Cette relation n'est autre que l'équation intrinsèque ordinaire du vecteur. Elle montre que ce vecteur est toujours dans le plan osculateur. C'est ce qui a lieu pour l'accélération d'un point, dérivée de sa vitesse ou pour la force agissant sur un fil, dérivée de la tension.

Le moment de a par rapport à une forme b, que nous supposerons à invariant non nul, est

$$\mathrm{M} = 6ab \quad .$$

Si b est fixe

$$\mathrm{M}' = 6a'b \quad .$$

Le moment du segment dérivé est la dérivée du moment du segment primitif. Lorsque le segment a' appartient à un complexe

$$6a'b = 0 = \mathrm{M}' \,, \qquad \text{d'où} \qquad \mathrm{M} = c^{te} \quad .$$

On a donc le *Théorème. — Si le dérivé d'un segment appartient à un complexe linéaire, ce segment a par rapport au complexe un moment constant.*

On déduit de là que dans le cas de forces centrales, la vitesse ou la tension ont par rapport au centre un moment constant.

La dérivée du vecteur T est $\frac{\nu}{\rho}$ N, donc si la normale principale à une courbe rencontre une droite fixe, la tangente a par rapport à cette droite un moment constant — propriété connue.

Vecteur dans le plan rectifiant. $\psi = \frac{\pi}{2}$, ou $y = 0$.

$$\Delta = -\cos\varphi\left(\frac{\sin\varphi}{\rho} + \frac{\cos\varphi}{\tau}\right) = \nu z\left(\frac{x}{\rho} + \frac{z}{\tau}\right) \quad .$$

On doit supposer

$$\cos\varphi \quad \text{ou} \quad z\nu \neq 0 \quad .$$

La condition (1) devient

$$\operatorname{tang}\varphi = -\frac{\rho}{\tau} \quad . \tag{5}$$

Avant de poursuivre cherchons le plan tangent à la surface décrite par PI. Ce plan est au point P :

$$\mathrm{P}(\mathrm{PI})' = \mathrm{P\,P'I} \quad ,$$

$$\mathrm{I} = \sin\varphi \,.\, \mathrm{T} + \cos\varphi\cos\psi\,\mathrm{N} + \cos\varphi\sin\psi \,.\, \mathrm{B} \quad ,$$

$$\mathrm{P}' = \mathrm{T} \quad ,$$

$$\mathrm{P\,P'I} = \mathrm{P}\cos\varphi\,[\cos\varphi\,\mathrm{NT} + \sin\psi\,\mathrm{BT}] \quad .$$

Pour $\psi = \frac{\pi}{2}$ il se réduit à

$$\mathrm{PP'I} = \cos\varphi \sin\psi \,\mathrm{PBT} \quad ,$$

c'est-à-dire au plan rectifiant. Le segment proposé décrit la surface rectifiante et la relation (5) en donne la propriété fondamentale.

Comme application mécanique considérons le trièdre TNB lié à un point décrivant une courbe quelconque. On sait que l'axe instantané a pour coordonnées à chaque instant :

$$x = -\frac{1}{\rho} \qquad y = o \qquad z = \frac{1}{\tau} \quad .$$

Il est bien dans le plan rectifiant ; en outre

$$\frac{x}{\rho} + \frac{z}{\tau} = 0 \quad .$$

et l'axe instantané décrit la surface rectifiante.

Soit une ligne asymptotique ; son plan osculateur étant tangent à la surface, le plan PBT lui est normal et contient le vecteur n normal à la surface. Si nous voulons que la ligne soit en même temps de courbure, il faut :

$$\frac{x}{\rho} + \frac{z}{\tau} = 0 \quad ;$$

or $\frac{1}{\rho} = 0$ dans une ligne asymptotique, donc il faut

$$\frac{1}{\tau} = 0 \quad ,$$

la ligne considérée doit être droite.

Vecteur dans le plan polaire. — $\varphi = 0$.

(6) $$\Delta = \psi' - \frac{1}{\tau} = 0 \quad .$$

Soit α l'angle de la normale avec une direction fixe arbitraire

$$ds = \tau\, d\alpha \quad , \qquad \frac{1}{\tau} = \alpha' \quad ;$$

(6) devient

$$\psi' = \alpha' \quad , \qquad \psi = \alpha + \alpha_0 \quad .$$

Nous déterminerons la direction fixe de façon que $\alpha_0 = 0$

$$\psi = \alpha \quad . \tag{7}$$

Si $\psi = o$, c'est-à-dire si la binormale décrit une surface développable, cette surface est un cylindre, la courbe est plane.

D'une façon générale une droite du plan polaire est normale à la courbe ; le problème en question revient à l'étude des développées de la courbe. Ainsi soient deux segments a et b répondant à la question, on a

$$\psi_a - \psi_b = \alpha_a - \alpha_b = \mathrm{c^{te}}.$$

C'est-à-dire les tangentes aux deux développées correspondantes font un angle constant.

Vecteur fixe par rapport au trièdre T, N, B. — φ et ψ sont constants ou x', y', z', sont nuls.

$$\Delta = \frac{\cos\varphi \sin\varphi \sin\psi}{\rho} + \frac{\cos^2\varphi}{\tau} = 0 \quad ,$$

$$\frac{\rho}{\tau} = -\operatorname{tang}\varphi \,.\, \sin\psi = \mathrm{K} \quad . \tag{8}$$

La courbe proposée est une hélice.
Prenons Δ sous la forme (2)

$$\mathrm{K}(z^2 + y^2) + xz = o \quad . \tag{9}$$

Tous les vecteurs répondant à la question sont situés sur le cône (9).

On voit que ce cône est tangent au plan osculateur ; il a pour plan de symétrie le plan rectifiant, c'est-à-dire le plan tangent au cylindre qui porte l'hélice ; il a dans ce plan les deux génératrices

$$z = o \quad , \qquad \frac{x}{\rho} + \frac{z}{\tau} = o \quad .$$

On voit aisément que cette génératrice est perpendiculaire à celle du cylindre qui passe au même point. Enfin les sections de ce cône parallèles au plan polaire sont circulaires.

Lorsque le cône ainsi défini et semblable à lui-même est entraîné le long de l'hélice, chacune de ses génératrices décrit une surface développable et ce sont les seules droites qui jouissent de cette propriété.

Georges MONNET (Lyon).

UNE LEÇON D'OUVERTURE DE M. PAINLEVÉ

L'enseignement de l'Ecole Polytechnique de Paris a subi deux rudes épreuves depuis ces dernières années. La mort de Sarrau, d'une part, l'état de santé de M. Léauté, de l'autre, ont conduit coup sur coup à deux nominations nouvelles aux chaires de mécanique. Sarrau a été remplacé par M. Lecornu qui, en fait, avait fait le cours depuis deux ans à titre de suppléant et de la façon la plus brillante.

Quant au successeur de M. Léauté, c'est M. Painlevé, qui n'est pas ancien élève de l'Ecole Polytechnique. Les Conseils de l'Ecole ont montré une fois de plus leur largeur d'esprit en appelant à professer ce cours si important, l'un des plus éminents géomètres de la jeune génération.

En ouvrant son cours, vers la fin de février dernier, le nouveau professeur a débuté par l'allocution suivante, que nous sommes heureux de pouvoir reproduire, en l'empruntant au *Bulletin du Groupe parisien des anciens élèves de l'Ecole Polytechnique* (n° de mars 1905).

Ce discours fait honneur à celui qui l'a prononcé, aussi bien qu'à ses jeunes auditeurs, qui méritaient d'entendre un tel langage et sauront en profiter. Il est bien utile que les mesquines préoccupations d'origine s'effacent devant la supériorité du talent et les intérêts de l'enseignement et de la science.

LA RÉDACTION.

Messieurs, c'est pour moi un grand honneur d'être appelé à enseigner dans cette chaire où se sont succédé tant de maîtres illustres, dans cette Ecole créée par la Révolution pour défendre, propager et développer les idées scientifiques