propos de mon article sur la théorie des parallèles .

Objekttyp: **Chapter**

Zeitschrift: **L'Enseignement Mathématique**

Band (Jahr): **7 (1905)**

Heft 1: **L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE**

PDF erstellt am: **15.09.2024**

A propos de mon article sur la théorie des parallèles [1].

Introduction a la Théorie Euclidienne des Parallèles ; Postulat Fondamental.

L'expérience nous démontre que, étant fixées deux droites coplanaires m et n (fig. 1), si dans des différents points A, B, C... de l'une d'elle, de m par exemple, l'on mène les droites perpendiculaires à l'autre, et l'on mesure les distances AR, BS, CT, de ces points à l'autre droite, si ces distances ont commencé à croître de gauche à droite comme dans la fig. 1, elles continueront à croître si on prolonge les droites vers la droite. On constate aussi que les distances en question diminueront sans cesse si l'on prolonge les droites vers la gauche. Il n'arrive jamais que ces distances, après avoir commencé à augmenter (ou à diminuer) d'un côté commencent ensuite à diminuer (ou à augmenter) du même côté. Ayant vérifié ce fait pour n'importe quelle paire de droites coplanaires, si loin qu'on puisse les prolonger, nous sommes, par induction, portés à l'admettre même au delà de notre champ d'expérience. Nous énonçons ce fait ainsi :

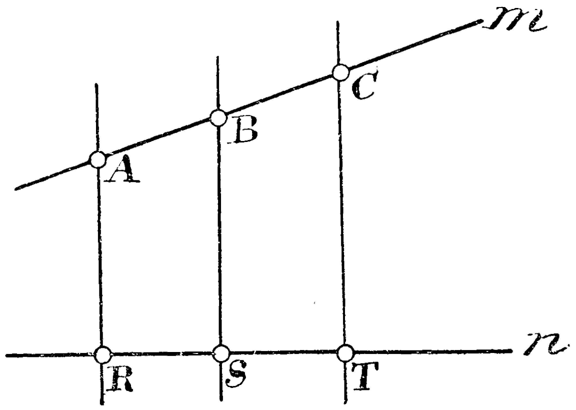

Fig. 1.

Postulat Fondamental. *Dans un plan, une ligne droite qui a commencé à s'approcher d'une autre, ne peut pas ensuite s'en éloigner ; et réciproquement.*

Conséquences : Considérons deux droites a et b perpendiculaires à une troisième c (fig. 2). La distance du point $M \equiv ac$ à la droite b est évidemment le segment MN ($N \equiv bc$). Ce segment est aussi la distance de N à la droite a. Nous allons démontrer que la distance AB d'un point quelconque A d'une des droites, de a par exemple,

[1] La présente note apporte quelques simplifications à l'article publié par M. Dassen sous le titre de *La théorie des Parallèles basée sur un postulat plus évident que ceux employés ordinairement* (*L'Ens. math.*, 6e année, p. 47-57). — Voir, dans le présent numéro, l'analyse de son récent manuel de Géométrie.

La Rédaction.

à l'autre droite est aussi nécessairement égale à MN ; pour cela, prenons un point A′ tel que AM = MA′ et soit A′B′ la distance de A′ à la droite b. Il est évident que AB = A′B′ (égalité par symétrie ou par congruence en faisant tourner la partie gauche de la figure autour du c jusqu'à la faire tomber sur la partie droite, alors, comme des points M et N l'on ne peut mener qu'une seule droite perpendiculaire à c, le point A tombe sur A′ ; la droite AB prend la direction de A′ B′, car ces deux droites sont perpendiculaires à b. Donc le point B se confond avec le B′).

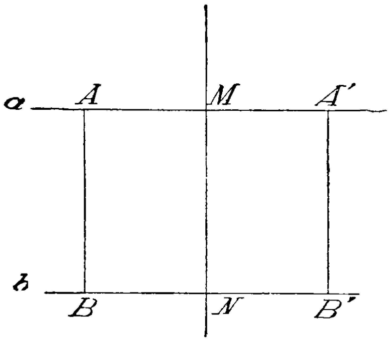

Fig. 2.

Par conséquent si AB était plus grand que MN, A′B′ le serait aussi ; la droite a aurait alors commencé à s'approcher de b, du point A au point M, pour s'éloigner ensuite du point M au point A′ ; ce qui est au contraire un postulat fondamental. On verrait de même que AB ne peut être moindre que MN. Donc AB = MN. Tous les points de a ou de b sont par conséquent à la même distance de b ou de c.

DÉFINITION. — Deux droites qui satisfont aux conditions antérieures, c'est-à-dire telles que tous les points de l'une d'elles se trouvent à la même distance de l'autre, se nomment *droites équidistantes*. — Donc :

THÉORÈME I. *Deux droites coplanaires, perpendiculaires à une troisième sont équidistantes.*

THÉORÈME II. *Par un point extérieur à une droite on peut toujours lui mener une droite équidistante et une seule.*

Soient la droite b et le point M (fig. 2). Dans le plan ainsi déterminé, menons, par M, la droite c perpendiculaire à b et ensuite la droite a perpendiculaire à c. Les droites a et b sont équidistantes d'après le théorème I, et il est évident que cette droite a est la seule équidistante de b passant par M, car pour si peu que l'on tourne a autour de M, la distance du point M à b ne change pas, tandis que cela arrive pour un autre point quelconque de la droite a.

DÉFINITION. Deux droites coplanaires fixes qui, pour une cause quelconque géométrique, ne peuvent se rencontrer, se nomment droites *parallèles*. Il est évident d'après cela que deux droites équidistantes sont forcément parallèles. Nous allons démontrer que réciproquement :

THÉORÈME III. *Deux droites parallèles sont forcément équidistantes.*

Soient les droites parallèles a et b (fig. 3). Par un point quelconque P de l'une d'elles, la b par exemple, menons la perpendiculaire c à l'autre a, ainsi que la perpendiculaire d à c. Les droites d et a sont équidistantes (Théorème I), donc si la droite d se confond avec b, le théorème est démontré. Supposons que cela n'a pas lieu, alors, nous prenons de chaque côté de P, sur d, deux points M et N équidistants de P, et que nous menions les droites m et n perpendiculaires à la droite a, celles-ci couperont évidemment d[1]. Soient A et B les deux points d'intersection. Les droites m et n doivent être perpendiculaires à d, car autrement les droites perpendiculaires à m et n menées par M et N se raient équidistantes de a (Théorème I) et l'on aurait ainsi menées deux droites équidistantes de a par un même point, ce qui est contraire à l'énoncé du théorème II.

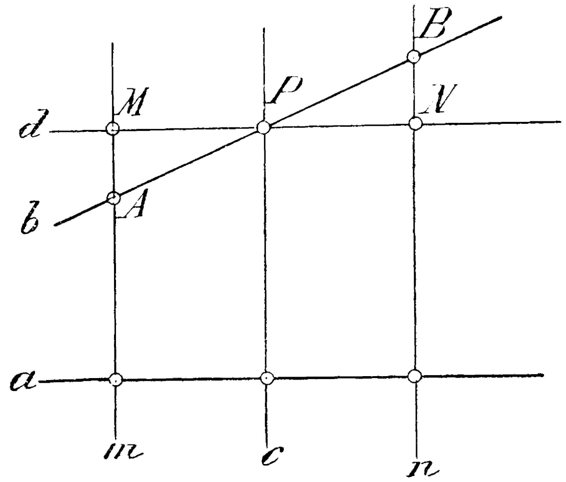

FIG. 3.

Les triangles APM et PBN sont, par conséquent, rectangles, et comme leurs côtés PM et PN sont égaux ainsi que les angles aigus opposés par le sommet P, ces triangles sont égaux ; donc AM = BN ; AP = PB. Donc, comme les droites a et d sont équidistantes, il résulte que les points de b se rapprochent de la droite a de quantité égales BN et MA pour des distances égales prises sur la dite droite b. Comme ces droites a et b sont fixes, elles doivent donc nécessairement se rencontrer ce qui est contraire à l'hypothèse. Les droites b et d doivent par conséquent se confondre et le théorème est démontré.

Scolie. De ce qui vient d'être démontré, il résulte que deux droites parallèles sont forcément équidistantes et qu'il est indifférent d'employer l'une ou l'autre de ces qualifications. Cependant comme le concept d'équidistance porte en lui-même celui de parallélisme, tandis que ce dernier semble, à premier abord, plus général, on emploiera uniquement le mot parallèle. Le théorème II s'énoncera alors ainsi :

THÉORÈME. *Par un point situé hors d'une droite l'on ne peut mener qu'une droite parallèle à la première.*

---

[1] Si on conservait quelque doute à ce sujet, il disparaitrait en observant que la droite b, ayant entré par le point P dans la portion de plan enfermée par les droites a, b, m, n doit nécessairement en sortir, en coupant le contour en quelqu'autre point ; car l'aire en question est limitée, tandis que la droite est indéfinie ; or, le point de sortie de b ne peut se trouver sur d puisque b a déjà le point P commun avec cette droite, il ne peut, non plus, se trouver sur a puisque les droites a et b sont parallèles ; il doit donc se trouver sur m ou sur n. Supposons qu'il se trouve sur m et nommons-le A, alors, l'égalité des triangles déterminés par les droites d, b, n et d, b, m égalité démontrée plus bas sans se baser sur le point B, fait voir que b coupe aussi n.

C'est l'énoncé ordinaire du postulat d'Euclide ; le reste de la théorie des parallèles euclidienne n'a donc pas besoin de subir aucune modification.

C. C. Dassen (Buenos-Aires).

CHRONIQUE

L'enseignement des mathématiques à l'Université.

Les vœux qui ont été exprimés au Congrès de Heidelberg en faveur de l'enseignement mathématique à l'Université sont sortis du vif sentiment d'une lacune de nos établissements supérieurs. Depuis que les sciences techniques ont pris dans tous les pays une importance considérable, on se préoccupe sérieusement de mettre l'enseignement des mathématiques au niveau des conditions actuelles de la Science et de la vie moderne. Rappelons donc les indications si utiles que contient l'un des vœux formulés par le 3e Congrès international des mathématiciens et signalons les à nouveau à l'attention des autorités scolaires :

Le *Congrès exprime le vœu que les établissements supérieurs obtiennent les moyens qui leur sont indispensables pour travailler à l'avancement des sciences mathématiques dans leur conception moderne et qui consistent principalement en la création de chaires nouvelles, de bibliothèques suffisamment fournies, de collections de modèles, et en l'installation de salles de dessin et de travaux pratiques.*

Ces conditions ne sont guère réalisées que dans quelques facultés, et la caractéristique de l'enseignement des mathématiques est encore, pour un grand nombre d'entre elles, l'insuffisance de l'organisation actuelle. Il importe donc de faire une étude critique de l'enseignement supérieur dans les principaux pays et d'en dégager les réformes à introduire.

Nous nous sommes déjà assurés plusieurs rapports embrassant un ensemble de questions et, au surplus, nous publierons sous la rubrique *Notes et Documents* divers extraits de plans d'études et d'autres documents officiels.

La Rédaction.