

SUR UN DÉVELOPPEMENT EN SÉRIE ENTIÈRE

Autor(en): **Jamet, V.**

Objektyp: **Article**

Zeitschrift: **L'Enseignement Mathématique**

Band (Jahr): **8 (1906)**

Heft 1: **L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE**

PDF erstellt am: **12.07.2024**

Persistenter Link: <https://doi.org/10.5169/seals-9265>

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Inhalten der Zeitschriften. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern. Die auf der Plattform e-periodica veröffentlichten Dokumente stehen für nicht-kommerzielle Zwecke in Lehre und Forschung sowie für die private Nutzung frei zur Verfügung. Einzelne Dateien oder Ausdrucke aus diesem Angebot können zusammen mit diesen Nutzungsbedingungen und den korrekten Herkunftsbezeichnungen weitergegeben werden. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Die systematische Speicherung von Teilen des elektronischen Angebots auf anderen Servern bedarf ebenfalls des schriftlichen Einverständnisses der Rechteinhaber.

Haftungsausschluss

Alle Angaben erfolgen ohne Gewähr für Vollständigkeit oder Richtigkeit. Es wird keine Haftung übernommen für Schäden durch die Verwendung von Informationen aus diesem Online-Angebot oder durch das Fehlen von Informationen. Dies gilt auch für Inhalte Dritter, die über dieses Angebot zugänglich sind.

une idée juste. Il n'est peut-être pas inopportun de rappeler ici que les membres de la Société mathématique de France ont connu sur ce sujet les scrupules d'un de leurs anciens confrères. Malheureusement, l'auteur s'obstinait à voir dans l'incorrection du langage une idée fautive de Cauchy. Par son manque de mesure et de perspicacité, il a sans doute éloigné ses auditeurs d'une observation qui avait quelque chose de juste.

E. CARVALLO (Paris).

SUR UN DÉVELOPPEMENT EN SÉRIE ENTIÈRE

Quand on veut donner aux élèves, antérieurement à toute notion sur les dérivées, l'exemple du développement d'une fonction en série entière, on recourt tout naturellement à l'identité.

$$(1) \quad (1 - x)^{-1} = 1 + x + x^2 + x^3 + \dots$$

(pour $x < 1$), qui résulte, soit de la théorie de la division, soit des progressions géométriques. Je me propose de généraliser cet exemple, et j'attache une certaine importance à cette généralisation, à cause de l'application dont elle est susceptible, et par laquelle je terminerai cet article. Pour le moment je veux montrer comment la formule (1) entraîne, comme conséquence, la formule suivante

$$(2) \quad (1 - x)^{-m} = 1 + \frac{m}{1} x + \frac{m(m+1)}{1 \cdot 2} x^2 + \dots \\ + \frac{m(m+1) \dots (m+p-1)}{p!} x^p + \dots$$

pour toutes les valeurs entières de m .

Soient, en effet, deux séries entières

$$\begin{aligned} S &= a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots \\ T &= b_0 + b_1x + b_2x^2 + \dots \end{aligned}$$

convergentes pour une même valeur de x . Je dis que le produit ST est égal à la somme de la série

$$\sum_{p=0}^{p=\infty} (a_0b_p + a_1b_{p-1} + \dots + a_p b_0) x^p,$$

dont la convergence résultera de la démonstration ci-après. Désignons par S_n la somme des $n + 1$ premiers termes de la série S , par T_n la somme des $n + 1$ premiers termes de la série T , posons

$$S = S_n + \alpha, \quad T = T_n + \beta$$

et observons que

$$ST = S_n T_n + \alpha T_n + \beta S_n + \alpha \beta.$$

Nous en déduisons que, n croissant au delà de toute limite $S_n T_n$ a pour limite ST .

Mais

$$S_n T_n = \sum_{p=0}^{p=n} (a_0b_p + a_1b_{p-1} + \dots + a_p b_0) x^p.$$

Donc le second membre de cette égalité a pour limite ST .

Admettons maintenant que l'égalité (2) soit vraie pour une certaine valeur de m et proposons-nous de démontrer qu'elle est vraie pour la valeur suivante. A cet effet, multiplions les égalités (1) et (2) membre à membre. Nous trouvons :

$$\begin{aligned} (1 - x)^{-(m+1)} &= \sum_{p=0}^{p=\infty} \left(1 + \frac{m}{1} + \frac{m(m+1)}{1.2} + \dots + \right. \\ &\quad \left. \frac{m(m+1) \dots (m+p-1)}{p!} \right) x^p \end{aligned}$$

et il reste à démontrer que le coefficient de x^p est égal à

$$\frac{(m+1)(m+2)\dots(m+p)}{p!}.$$

Soit donc

$$A_{m,p} = \frac{(m+1)(m+2)\dots(m+p)}{p!}.$$

On trouve, successivement

$$A_{m,p} = A_{m,p-1} \left(1 + \frac{m}{p}\right) = A_{m,p-1} + A_{m-1,p}.$$

De même

$$A_{m,p-1} = A_{m,p-2} + A_{m-1,p-1},$$

$$A_{m,p-2} = A_{m,p-3} + A_{m-1,p-2},$$

$$\dots$$

$$A_{m,2} = A_{m,1} + A_{m-1,2},$$

$$A_{m,1} = m + 1.$$

En ajoutant ces égalités membre à membre, et supprimant les termes communs aux deux membres de l'égalité résultante, on trouve

$$A_{m,p} = A_{m-1,p-1} + A_{m-1,p-2} + \dots + A_{m-1,2} + \frac{m}{1} + 1,$$

ou bien :

$$\frac{(m+1)(m+2)\dots(m+p-1)}{p!} = 1 + \frac{m}{1} + \frac{m(m+1)}{1.2} + \dots +$$

$$\frac{m(m+1)\dots(m+p-1)}{p!},$$

c. q. f. d.

Application. Il résulte de ce qui précède que pour toute valeur de m , entière et positive, le nombre

$$\left(1 - \frac{1}{m}\right)^{-m}$$

est égal à la somme de la série

$$1 + \frac{1}{1} + \frac{m(m+1)}{1.2} \cdot \frac{1}{m^2} + \frac{m(m+1)(m+2)}{1.2.3} \cdot \frac{1}{m^3} + \dots$$

Or le terme général de cette série, savoir

$$\frac{m(m+1)(m+2)\dots(m+p-1)}{p!} \cdot \frac{1}{m^p}$$

est égal à

$$\frac{\left(1 + \frac{1}{m}\right) \left(1 + \frac{2}{m}\right) \dots \left(1 + \frac{p-1}{m}\right)}{p!}.$$

On en conclut

$$(3) \quad \left(1 - \frac{1}{m}\right)^{-m} > 1 + \sum_1^{\infty} \frac{1}{p!} = e.$$

D'autre part :

$$\left(1 + \frac{1}{m}\right)^m = 1 + \sum_{p=1}^{p=m} \frac{\left(1 - \frac{1}{m}\right) \left(1 - \frac{2}{m}\right) \dots \left(1 - \frac{p-1}{m}\right)}{p!} < e.$$

J'aurai donc démontré que, m croissant au delà de toute limite, les deux nombres

$$\left(1 + \frac{1}{m}\right)^m, \quad \text{et} \quad \left(1 - \frac{1}{m}\right)^{-m}$$

ont pour limite e , si je fais voir que leur différence a pour limite zéro. Or

$$\left(1 - \frac{1}{m}\right)^{-m} = \left(\frac{m}{m-1}\right)^m = \left(1 + \frac{1}{m-1}\right)^m;$$

et, en vertu de l'identité :

$$x^m - a^m = (x - a) (x^{m-1} + ax^{m-2} + a^2x^{m-3} + \dots + a^{m-1}),$$

$$\left(1 + \frac{1}{m-1}\right)^m - \left(1 + \frac{1}{m}\right)^m = \frac{1}{m(m-1)} \left[\left(1 + \frac{1}{m-1}\right)^{m-1} + \right.$$

$$\left. \left(1 + \frac{1}{m-1}\right)^{m-2} \left(1 + \frac{1}{m}\right) + \dots + \left(1 + \frac{1}{m}\right)^{m-1} \right]$$

On en conclut :

$$\left(1 + \frac{1}{m-1}\right)^m - \left(1 + \frac{1}{m}\right)^m < \frac{1}{m(m-1)} m \left(1 + \frac{1}{m-1}\right)^{m-1} < \frac{e}{m-1};$$

et cette inégalité démontre la proposition.

V. JAMET (Marseille).

P. S. — Au moment de corriger l'épreuve, je m'aperçois que la dernière partie de ce travail est susceptible d'une grande simplification. En effet, la relation (3) entraîne la suivante :

$$\left(1 - \frac{1}{m+1}\right)^{-(m+1)} > e$$

ou bien

$$\left(1 + \frac{1}{m}\right)^{m+1} > e.$$

Mais :

$$\left(1 + \frac{1}{m}\right)^{m+1} = \left(1 + \frac{1}{m}\right)^m + \frac{1}{m} \left(1 + \frac{1}{m}\right)^m.$$

Donc :

$$\left(1 + \frac{1}{m}\right)^{m+1} - \left(1 + \frac{1}{m}\right)^m = \frac{1}{m} \left(1 + \frac{1}{m}\right)^m;$$

donc

$$\left(1 + \frac{1}{m}\right)^{m+1} - \left(1 + \frac{1}{m}\right)^m < \frac{e}{m},$$

et l'on est conduit à la même conclusion que ci-dessus.