MÉLANGES ET CORRESPONDANCE

Règle mnémonique pour retenir les analogies de Delambre.

(Extrait d'une lettre de M. D'OCAGNE*).*

«... En interrogeant les élèves sur l'Astronomie, je me suis aperçu de la difficulté qu'ils ont, en général, à écrire de mémoire au tableau les analogies de Delambre dont le secours est indispensable pour la résolution logarithmique des triangles sphériques. J'ai été ainsi amené à leur proposer la règle suivante :

Les analogies de Delambre rentrent toutes dans la forme

$$f\left(\frac{A}{2}\right)\varphi\left(\frac{b\pm c}{2}\right)=\varphi\left(\frac{a}{2}\right)\psi\left(\frac{B\pm C}{2}\right)$$

où f, φ, ψ sont des *sin* et *cos*. En outre :

1° f et ψ sont toujours différents ;

2° on a, sous φ, le signe $+$ ou le signe $-$, suivant que f est *sin* ou *cos* ;

3° on a, sous ψ le même signe que sous φ, ou non, suivant que ψ est le même que φ, ou non.

Cela permet d'écrire sans hésitation :

$$\sin\frac{A}{2}\sin\frac{b+c}{2}=\sin\frac{a}{2}\cos\frac{B-C}{2},$$

$$\sin\frac{A}{2}\cos\frac{b+c}{2}=\cos\frac{a}{2}\cos\frac{B+C}{2},$$

$$\cos\frac{A}{2}\sin\frac{b-c}{2}=\sin\frac{a}{2}\sin\frac{B-C}{2},$$

$$\cos\frac{A}{2}\cos\frac{b-c}{2}=\cos\frac{a}{2}\sin\frac{B+C}{2}.»$$

Remarque. — La très intéressante observation de M. D'OCAGNE peut se résumer symboliquement, d'une façon encore plus concise.

Si on assimile, dans chacun des membres, les signes sin et $+$, cos et $-$, $+$ et $+$, $-$ et $-$, chaque relation est caractérisée, dans le premier membre, par trois signes α, β, γ et dans le second par α', β', γ'.

On a toujours $\gamma = \alpha$, c'est-à-dire que le symbole du premier membre est $\alpha\beta\alpha$; et dès lors, celui du second $(\alpha'\beta'\gamma')$ est $\beta - \alpha - \beta$.

Si on écrit trois fois α, β et si on change le signe du dernier groupe

$$\alpha\ \beta\quad \alpha\ \beta\quad -\alpha - \beta\ ,$$

il suffit de diviser cette suite en deux moitiés

$$(\alpha\ \beta\ \alpha)\quad (\beta - \alpha - \beta)$$

pour obtenir les deux symboles caractérisant l'une quelconque des quatre relations. C.-A. L.

Un théorème sur la Géométrie moderne.

Voici un théorème de Géométrie moderne qui, je crois, est nouveau.

Théorème. — Etant donnés deux triangles perspectifs ABC et A'B'C', tels que les sommets A', B', C' soient situés un à un sur les côtés du triangle ABC, on a

$$\frac{BX.CY.AZ}{CX.AY.BZ} \cdot \frac{B'X'.\ C'Y'.\ A'Z'}{C'X'.\ A'Y'.\ B'Z'} = 1\ ,$$

X,X' étant les points d'intersection avec BC et B'C' d'une droite passant par A.
Y,Y' » » » » CA et C'A' » » B,
Z,Z' » » » » AB et A'B' » » C.

Démonstration. — Soit D le point d'intersection des droites AX et BB'. Si l'on considère AX comme transversale par rapport aux triangles BB'C, C'BB', on a

$$1 = \frac{BX.CA.B'D}{CX.B'A.BD}\ ,\qquad 1 = \frac{BD.B'X.C'A}{B'D.C'X.BA}\ ,$$

d'où l'on déduit

$$(\alpha)\qquad 1 = -\frac{AC'.CA.BX.B'X'}{AB'.AB.CX.C'X'}\ .$$

On a de la même manière

$$(\beta)\qquad 1 = -\frac{BA'.AB.CY.C'Y'}{BC'.BC.AY.A'Y'}\ ,$$

$$(\gamma)\qquad 1 = -\frac{CB'.BC.AZ.A'Z'}{CA'.CA.BZ.B'Z'}\ .$$