

Zeitschrift: L'Enseignement Mathématique
Band: 8 (1906)
Heft: 1: L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE

Artikel: LES FONCTIONS ANGULAIRES DANS LA GÉOMÉTRIE DE L'AJUSTAGE
Autor: Andrade, Jules
DOI: <https://doi.org/10.5169/seals-9270>

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. [Siehe Rechtliche Hinweise.](#)

Conditions d'utilisation

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. [Voir Informations légales.](#)

Terms of use

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. [See Legal notice.](#)

Download PDF: 23.11.2024

ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, <https://www.e-periodica.ch>

LES FONCTIONS ANGULAIRES

DANS LA GÉOMÉTRIE DE L'AJUSTAGE

I. — Quelques remarques sur la continuité.

DÉFINITION. — Un triangle sphérique dont aucun côté ne dépasse un quadrant est dit un triangle sphérique *réduit*.

LEMME 1. Dans un triangle sphérique réduit tout angle extérieur du triangle est plus grand que chacun des angles intérieurs qui n'ont pas même sommet que lui.

LEMME 2. — Dans un triangle sphérique réduit la bissectrice d'un angle intérieur partage le côté opposé en deux segments dont l'ordre d'inégalité est le même que celui des côtés contigus à ces segments.

Ce lemme est une conséquence du précédent et de la considération du triangle symétrique du proposé par rapport au plan de l'arc de grand cercle bissecteur.

THÉORÈME 1. — Dans tout triangle sphérique réduit, dont les deux côtés de l'angle droit sont suffisamment inégaux et suffisamment réduits, le rapport du plus petit y de ces côtés au plus grand x de ces côtés est un nombre comparable au nombre qui mesure l'angle \widehat{C} , opposé au côté y , lorsqu'on prend l'angle droit pour unité.

En d'autres termes, on aura à la fois

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\widehat{C}}{1^{\text{droit}}} = \frac{y}{x} \cdot m ; \\ \frac{y}{x} = \frac{\widehat{C}}{1^{\text{droit}}} \cdot m' ; \end{array} \right. \quad \begin{array}{l} m \text{ et } m' \text{ désignant deux} \\ \text{ nombres finis.} \end{array}$$

DÉMONSTRATION. — Considérons un triangle sphérique ABC rectangle en A, dont AB est le côté le plus petit, soit \widehat{C}

l'angle aigu opposé à ce côté ; sur AC portons $AD_1 = AB$, et joignons B et D_1 , par un arc de grand cercle ; portons $D_1D_2 = BD_1$, et joignons B et D_2 par un arc de grand cercle ; et ainsi de suite ; soit D_n le dernier point obtenu sur AC dans cette opération avant de franchir le point C.

Nommons u_1 la valeur commune des angles de sommets B et D_1 dans le triangle isocèle AD_1B ; nommons de même u_2 la valeur commune des angles de sommets B et D_2 dans le triangle isocèle BD_1D_2 ; et ainsi de suite. La considération de l'excès sphérique dans ces triangles successifs nous donne

$$u_n > \frac{u_1}{2^{n-1}} > \frac{1^{\text{droit}}}{2^n},$$

et par suite

$$\widehat{ABD}_n = u_1 + u_2 + u_3 + \dots + u_n > u_1 \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \dots + \frac{1}{2^{n-1}} \right) ;$$

ainsi donc :

$$(1) \quad \text{,} \quad (1^{\text{dr.}} > \widehat{CBA} > 2u_1 \left(1 - \frac{1}{2^n} \right) .$$

Notons en passant cette *conséquence* :

L'angle aigu d'un triangle sphérique rectangle et isocèle dont les deux cotés de l'angle droit tendent vers zéro a pour limite la moitié d'un droit.

Soit P le pôle de l'arc de grandeur AC, répétons à la suite l'angle \widehat{C} autant de fois : q , qu'il est possible, dans l'angle droit \widehat{ACP} ; les basés opposées au sommet C et situées sur AP dans ces triangles successifs vont en croissant ainsi que les aires de ces triangles ; soit

$$\widehat{ACQ} = \widehat{ACB} \times q ,$$

on a :

$$\text{aire ABC} < \frac{\text{aire CQA}}{q} ,$$

c'est-à-dire en prenant l'aire du triangle trirectangle comme unité :

$$\text{aire ABC} < \text{aire CQA} \cdot \frac{\widehat{C}}{\widehat{ACQ}} < \frac{\text{arc AC}}{1 \text{ quadrant}} \cdot \frac{\widehat{C}}{\widehat{ACQ}} ,$$

ou

$$(2) \quad \text{aire ABC} < \frac{\text{arc AC}}{1 \text{ quadrant}} \cdot \frac{\widehat{C}}{\left(1 - \frac{\theta}{q}\right)^{\text{droit}}},$$

θ désignant un nombre positif < 1 ;

l'entier q sera supposé > 2 .

D'ailleurs nous avons pour tirer parti de (2)

$$\text{aire ABD}_n < \text{aire ABC},$$

donc en vertu de (2)

$$u_n + \widehat{\text{ABD}}_n - 1^{\text{dr}} < \frac{u_n}{1 - \frac{\theta}{q}} \cdot \frac{\text{arc AC}}{1 \text{ quadrant}},$$

ou, à fortiori :

$$u_n \left[1 - \frac{1}{1 - \frac{\theta}{q}} \cdot \frac{\text{arc AC}}{1 \text{ quadrant}} \right] + 2u_1 \left(1 - \frac{1}{2^n} \right) - 1^{\text{dr}} < 0,$$

$$(3) \quad u_n \left[1 - \frac{1}{1 - \frac{\theta}{q}} \cdot \frac{\text{arc AC}}{1 \text{ quadrant}} \right] < 1^{\text{dr}} - 2u_1 + \frac{2u_1}{2^n} < \frac{2u_1}{2^n}.$$

Or nous avons

$$x < 2^{n+1}y,$$

c'est-à-dire

$$\frac{1}{2^n} < 2 \cdot \frac{y}{x},$$

donc en substituant dans (3) nous aurons cette limitation de u_n

$$u_n < 4u_1 \frac{y}{x} \frac{1}{1 - \frac{1}{1 - \frac{\theta}{q}} \frac{\text{arc AC}}{1 \text{ quadrant}}},$$

et à fortiori

$$\widehat{\text{BCA}} < 4u_1 \frac{1}{1 - \frac{1}{1 - \frac{\theta}{q}} \frac{x}{1 \text{ quadrant}}} \cdot \frac{y}{x},$$

et si

$$\frac{x}{1 \text{ quadrant}} < \frac{1}{3},$$

$$(4) \quad \widehat{BCA} < 12u_1 \frac{y}{x}.$$

Nous allons maintenant limiter le rapport $\frac{y}{x}$ par l'angle C. Sur AB prenons $AD = AC = x$; et portons sur AB à partir de A, $AB = y$, autant de fois, soit r , que possible dans AD; $AE = (r + 1)y > AD$ soit C''_0 l'angle ECA; et soit C_0 l'angle DCA;

$$ry < x < (r + 1)y$$

et en vertu d'une remarque précédente :

$$\widehat{C''_0} < (r + 1) \widehat{C},$$

et à fortiori :

$$\widehat{C_0} < \left(\frac{x}{y} + 1\right) \widehat{C},$$

d'où

$$\frac{y}{x + y} < \frac{\widehat{C}}{\widehat{C_0}},$$

ce qui donne

$$\frac{y}{x} < \frac{\widehat{C}}{\widehat{C_0} - \widehat{C}}$$

THÉORÈME 2. — Extension du théorème précédent aux triangles plans. Dans la géométrie de la droite fermée, le plan est une variété de la sphère et la méthode précédente s'applique alors sans modification. Nous n'avons alors qu'à envisager le cas de la droite ouverte; or, en laissant de côté le cas classique d'Euclide, on sait que dans la géométrie de la droite ouverte la somme des angles d'un triangle rectiligne est moindre que 2 droits d'une quantité qu'on appelle le déficit du triangle.

Répétons alors la construction indiquée plus haut des points successifs D_1, D_2, \dots, D_n situées sur AC et conservons

les notations employées, nous aurons ici, en introduisant $x' = BC$,

$$x' < 2^{n+1} y ;$$

et

$$\widehat{C} < u_n < 1^{\text{droit}} \cdot \frac{1}{2^n} < 1^{\text{droit}} \cdot \frac{2y}{x'} < \frac{2y}{x-y} ,$$

ou

$$\frac{\widehat{C}}{1^{\text{droit}}} < \frac{2y}{y-x} .$$

Telle est la limitation de l'angle C par le rapport $\frac{y}{x}$; quant à la limitation du rapport $\frac{y}{x}$ par l'angle C elle ne souffre aucune modification.

REMARQUE. — Les théorèmes précédents nous seront surtout utiles en considérant des triangles rectangles dont le plus grand côté de l'angle droit sera variable en tendant vers zéro, c'est-à-dire infiniment petit.

On peut alors comme conséquence directe de ces théorèmes énoncer ce résultat : si y est infiniment petit d'ordre supérieur à l'ordre de x , l'angle C est infiniment petit avec x et réciproquement.

De là encore les conséquences importantes qui suivent, mais dont la démonstration est facile et intuitive :

THÉORÈME 3. — Dans un cercle *donné* la corde qui est vue du centre sous un angle infiniment petit est un infiniment petit de même ordre et elle fait un angle infiniment petit avec la perpendiculaire à l'extrémité du rayon.

THÉORÈME 4. — Dans un triangle rectangle (sphérique ou plan) dont le côté de l'angle droit x est fini et dont l'autre côté y est infiniment petit, l'excès de l'hypoténuse z sur le côté x est avec y dans un rapport qui est infiniment petit.

THÉORÈME 5. — Sur le plan (ou sur la sphère) la longueur d'un arc de cercle peut être définie comme la limite du périmètre d'une ligne brisée inscrite dont les côtés tendent simultanément vers zéro. (Remarque ; sur la sphère les éléments de la ligne brisée sont évalués angulairement par leurs angles au centre de la sphère).

THÉORÈME 6. — La longueur L d'un arc de cercle dont l'angle au centre est α , est déterminé, est une fonction *continue* du rayon r de l'arc et l'on peut écrire

$$(5) \quad L = \alpha R(r), \quad \text{la fonction } R \text{ est continue.}$$

THÉORÈME 7. — Ce théorème s'applique aussi sur la sphère, en évaluant angulairement les longueurs d'arcs de grand cercle et l'on a

$$(6) \quad l = \alpha \psi(r), \quad l \text{ et } r \text{ étant évaluées angulairement.}$$

REMARQUE. — Le rapport d'un arc infiniment petit à sa corde tend vers l'unité.

II. Rotations finies autour d'axes concourants. Rotations relatives.

THÉORÈME 8. — Quand un solide éprouve un déplacement autour d'un point fixe, ce déplacement peut être obtenu par une rotation convenable autour d'un axe convenable passant par ce point fixe.

THÉORÈME 9. — Quand un solide fixé par un point O éprouve une rotation α_1 autour d'un axe U_1 passant par ce point ; puis une rotation α_2 autour d'un axe U_2 passant par ce point, le déplacement final du solide peut être obtenu par une rotation unique α_3 autour d'un axe U_3 passant par ce même point.

En représentant les axes par leurs images sphériques *orientées*, sur une sphère de centre O la combinaison des déplacements successifs (1) et (2) est définie comme il suit (toutes les rotations ne dépassant pas un demi-tour) : Par le premier pôle P_1 menons un demi-arc de grand cercle P_1x faisant avec le demi-arc de grand cercle $\overrightarrow{P_1P_2}$ un angle égal à la rotation $-\frac{1}{2}\alpha_1$; par le second pôle P_2 menons un demi-arc de grand cercle P_2y faisant avec le demi-arc de grand cercle $\overrightarrow{P_2P_1}$ l'angle $+\frac{1}{2}\alpha_2$.

Ces deux demi-arcs de grand cercle se coupent au point P_3 et l'angle de $\overrightarrow{P_3P_2}$ avec le prolongement de $\overrightarrow{P_1P_3}$ est égal à $+\frac{1}{2}\alpha_3$.

Définition des rotations relatives autour d'un point fixe.
 — Soient U_1, U_2, U_3, \dots , des droites concourantes envisagées dans l'ordre précité; considérons un premier solide S_1 animé d'une rotation continue α_1 autour de U_1 , puis, par rapport à ce solide S_1 , considérons un second solide S_2 en mouvement relatif de rotation continue et décrivant α_2 par rapport à une droite de S_1 qui coïncidait avec U_2 à l'époque t ; nous supposons que les rotations continues et simultanées α_1 et α_2 demeurent dans un rapport constant donné, on pourra poser par exemple $\alpha_1 = \omega_1 (t' - t)$, $\alpha_2 = \omega_2 (t' - t)$, les constantes ω_1 et ω_2 seront alors les vitesses angulaires des deux rotations relatives considérées.

On considérera de même un troisième solide se détachant du solide S_2 par une rotation continue α_3 , à vitesse constante ω_3 autour d'une droite de S_2 qui à l'époque t coïncidait avec U_3 et ainsi de suite.

Nous définissons ainsi par des emboîtements successifs de solides le mouvement d'un dernier solide S_n en mouvement relatif de rotation continue par rapport au solide précédent S_{n-1} , cette rotation s'exécutant autour d'une droite de S_{n-1} , qui coïncidait avec U_n à l'époque t . Le temps t ne joue ici que le rôle d'une variable indépendante.

A l'égard de ces mouvements on a les théorèmes suivants :

THÉORÈME 10. — Dans un mouvement de rotation uniforme chaque point d'un solide possède une vitesse à l'époque t , c'est-à-dire que si on envisage le déplacement MM' d'un point du corps durant le temps $dt = t' - t$, la direction MM' émanée de M tend vers une direction limite lorsque dt tend vers zéro et en même temps le rapport $\frac{MM'}{dt}$ tend vers une valeur limite appelée *vitesse actuelle*.

THÉORÈME 11. — Quand un solide pivote sur un point fixe, si deux points particuliers du solide ont l'un et l'autre une vitesse actuelle, tous les autres points du solide ont aussi une vitesse actuelle; celle-ci est la même que si le solide allait à partir de l'époque t continuer à tourner d'une rotation uniforme autour d'un axe convenable; ce théorème est une conséquence des théorèmes 8 et 10.

Les théorèmes précédents rapprochés de la notion des mouvements relatifs de pivotement et des lemmes de continuité conduisent à cette conséquence importante.

THÉORÈME 12. — La combinaison de deux mouvements relatifs de rotation sur un même point pivot est au point de vue de la distribution des vitesses dans le dernier solide en mouvement, *indépendante de l'ordre dans lequel on a envisagé les droites* $U_1 U_2$ *pour définir le mouvement combiné*; et la distribution des vitesses est la même que si le solide tournait avec une vitesse ω_3 autour d'un axe dont le pôle p_3 sur une sphère concentrique au pivot et sur l'arc $p_1 p_2$ qui joint les pôles séparés définis à l'époque t ; de plus en faisant $x = p_1 p_3$, $y = p_3 p_2$, $z = x + y$, on aura

$$(7) \quad \frac{\omega_1}{\psi(y)} = \frac{\omega_2}{\psi(x)} = \frac{\omega_3}{\psi(z)}.$$

COROLLAIRE. — Si donc on considère les *vecteurs* ou segments représentatifs des rotations $\omega_1, \omega_2, \omega_3$ portés sur ces axes, *il existe une opération qui permet de déduire le troisième vecteur au moyen des deux premiers*, et le vecteur ω_3 est dans le plan des deux premiers.

THÉORÈME 13. — Lorsqu'un point M d'un solide éprouve par une rotation donnée un déplacement infiniment petit du premier ordre de M en M' , un point m voisin de M par un écart d'ordre supérieur au premier viendra en m' et l'écart $M'm'$ sera infiniment petit d'ordre supérieur au premier.

THÉORÈME 14. — La combinaison de n rotations relatives concourantes définies plus haut est, au point de vue de la distribution des vitesses à l'époque t , indépendante de l'ordre qui a présidé à l'emboîtement des mouvements successifs.

COROLLAIRE. — Il existe une opération vectorielle définissant le vecteur *résultant* de plusieurs vecteurs donnés concourants, et cette opération jouit des propriétés suivantes :

1. L'opération est invariante (conséquence du théorème 9);
2. L'opération se réduit à l'addition algébrique des segments si les vecteurs sont portés par une même droite;
3. L'opération est commutative (indépendante de l'ordre);

4. L'opération est associative (plusieurs vecteurs composants sont remplaçables par leur vecteur résultant);

5. L'opération est continue;

6. L'ensemble de deux vecteurs n'est équivalent à zéro que si ces vecteurs, portés par une même droite, sont égaux et contraires.

III. — Composition des vecteurs.

Composition des vecteurs concourants d'un plan.

Nous allons indiquer l'interprétation analytique des faits qui précèdent. Soit F un vecteur, d'intensité f , émanant de O_1 et défini dans un plan en *direction autour de ce point* par l'angle *orienté* α que sa direction fait avec une droite OX .

Il résulte des propriétés de l'opération de composition des vecteurs que ce vecteur peut être décomposé en deux vecteurs X et Y agissant suivant Ox et Oy et que

$$X = f \cdot g(\alpha) \quad , \quad Y = f \cdot h(\alpha) \quad ,$$

g et h désignant deux fonctions *continues* de l'angle α .

L'invariance donne de suite les propriétés :

$$(I) \quad \left\{ \begin{array}{l} g(-\alpha) = g(\alpha) \quad , \quad h(-\alpha) = -h(\alpha) \quad , \\ g(\alpha + 1^{\text{dr}}) = -h(\alpha) \quad , \\ h(\alpha + 1^{\text{dr}}) = h(\alpha) \quad , \end{array} \right.$$

enfin l'associativité et l'invariance combinées, nous donnent après une rotation arbitraire du système des axes de repère :

$$(E) \quad \left\{ \begin{array}{l} g(u + v) = g(u)g(v) - h(u)h(v) \quad , \\ h(u + v) = h(u)g(v) + h(v)g(u) \quad . \end{array} \right.$$

Les propriétés (I) et (E) nous donnent de suite l'équation fonctionnelle

$$(8) \quad \left\{ \begin{array}{l} g(u + v) + g(u - v) = 2g(u)g(v) \quad , \\ \text{que nous associerons à la condition de continuité} \\ g(0) = 1 \quad . \end{array} \right.$$

Nous aurons d'ailleurs ici la condition supplémentaire $g(1^{\text{droit}}) = 0$. (8 bis). Or, j'ai démontré (*Bull. Soc. Mathém. de France*, Année 1900) que toute fonction g continue, solution de (8) doit admettre une fonction dérivée et que les seules solutions continues de (8) sont alors :

$$(9) \left\{ \begin{array}{l} \text{ou bien} \quad g(u) = 1 + \sum_{n=1}^{n=\infty} (-1)^n \left(\frac{u}{k}\right)^{2n} \frac{1}{1.2.3\dots 2n} \equiv \cos \frac{u}{k}, \\ \text{ou bien} \quad g(u) = 1 + \sum_{n=1}^{n=\infty} \left(\frac{u}{k}\right)^{2n} \frac{1}{1.2.3\dots 2n} \equiv \cos \text{hyp} \frac{u}{k}, \\ \text{ou bien} \quad g(u) = 1. \end{array} \right.$$

Dans le cas qui nous occupe nous avons la condition supplémentaire $g(1^{\text{dr}}) = 0$ et le premier type de solution convient seul ici ; la constante k dépend du choix de l'unité d'angle.

k sera égal à 1 si on adopte une unité d'angle dans laquelle l'angle droit sera représenté par la plus petite racine $\frac{\pi}{2}$ de l'équation :

$$1 + \sum_{n=1}^{n=\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{1.2.3\dots 2n} = 0.$$

Composition des vecteurs concourants dans l'espace. — En décomposant un vecteur suivant les 3 arêtes d'un trièdre trirectangle, on voit qu'on peut effectuer cette décomposition, en apparence de trois manières différentes, et en exprimant que ces trois modes sont : 1° compatibles, 2° uniques ; d'après le 6^{me} caractère de la composition on obtient les relations fondamentales qui existent entre les six éléments d'un triangle sphérique.

Pour compléter l'étude du système (8), j'ajoute que si l'on pose

$$H(\alpha) = \int_0^{\alpha} g(z) dz,$$

on aura, en laissant de côté le cas de $g(z) = 1$, et après un choix convenable de la variable z ,

$$\begin{aligned} g(\alpha + \beta) &= g(\alpha)g(\beta) - \varepsilon H(\alpha)H(\beta) , \\ H(\alpha + \beta) &= g(\alpha)H(\beta) + g(\beta)H(\alpha) , \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \varepsilon = 1 \text{ si } g(\alpha) = \cos \alpha , & \quad \text{et en ce cas } H(\alpha) = \sin \alpha ; \\ (\varepsilon = -1) \text{ si } g(\alpha) = \cos \text{hyp } \alpha , & \quad \text{et en ce cas } H(\alpha) = \sin \text{hyp } \alpha . \end{aligned}$$

Composition des vecteurs d'un plan perpendiculaires à une même droite et agissant d'un même côté. — Si on considère 2 rotations successives autour d'axes perpendiculaires à un plan P et dirigés d'un même côté de ce plan, on voit que si elles sont suffisamment petites, elles sont remplaçables par une rotation unique perpendiculaire à ce plan; cette circonstance va remplacer ici le rôle joué par le théorème 9 pour les vecteurs concourants. De là et par les lemmes déjà utilisés on conclut que :

Deux vecteurs d'égale intensité p , tous deux situés dans un même plan, perpendiculaires à une même droite de ce plan, et tirant d'un même côté de cette droite, admettent un vecteur résultant perpendiculaire à la même droite et de plus l'intensité de ce vecteur résultant a pour valeur $2 p S(x)$; x désignant la demi-distance des points où les vecteurs composants coupent la perpendiculaire commune, et S désignant une fonction continue.

De plus, en considérant 2 paires de tels vecteurs dont les pieds sur leur perpendiculaire commune sont distribués sur cette droite symétriquement par rapport à un même point, on voit que le caractère continu et le caractère associatif de la composition se traduisent encore par les conditions :

$$(11) \quad \begin{cases} S(x + y) + S(x - y) = 2S(x)S(y) , \\ S(0) = 1 . \end{cases}$$

Mais, cette fois la condition supplémentaire $g(1^{\text{droit}}) = 0$ de la composition des vecteurs concourants n'a plus son analogue; en sorte que nous avons ici le choix entre les trois solutions du problème 8, c'est-à-dire entre les trois déterminations :

$$(11) \quad \left\{ \begin{array}{l} \text{ou } S(x) = 1 . \\ \text{ou } S(x) = \cos \frac{x}{k} , \\ \text{ou } S(x) = \cos \text{hyp } \frac{x}{k} , \end{array} \right.$$

ce qui nous indique que la géométrie de l'ajustage va alors bifurquer en trois variétés dont la géométrie d'Euclide est un cas particulier.

La composition dans un plan de deux vecteurs inégaux perpendiculaires de même sens sur une même droite s'obtient d'ailleurs immédiatement en introduisant la fonction $R(r)$ de l'équation 5; il suffit de comparer les vitesses des pieds A et B des deux vecteurs ω_1 et ω_2 dans les mouvements composants et dans le mouvement résultant, soit C situé entre A et B le pied du vecteur résultant ω_3 ; en faisant $AC = x$, $CB = y$.

Nous aurons de suite :

$$\frac{\omega_1}{R(y)} = \frac{\omega_2}{R(x)} = \frac{\omega_3}{R(x+y)} .$$

Comparons ce résultat qui concerne les vecteurs vitesses de rotations à celui que fournit l'emploi de la fonction S; notre argument de comparaison sera la généralisation d'une méthode indiquée par Archimède. En effet, introduisons la fonction H, définie plus haut; soit C' un point intermédiaire entre A et B sur AB et soient C'A = x', C'B = y', D le symétrique de C' par rapport au pied A, E le symétrique de C' par rapport au pied B.

Par le rôle de la fonction H ou par sa forme analytique déjà indiquée, nous voyons que cette fonction est croissante dans la géométrie de la droite ouverte, de même cette fonction est croissante tant que la valeur de la variable n'atteint pas le quart du tour de la droite, dans la géométrie de la droite fermée, or on peut s'assurer en prenant la distance A B moindre qu'un demi-tour de droite qu'il n'existe entre A et B qu'un point C' tel que

$$\frac{\omega_1}{H(x')} = \frac{\omega_2}{H(y')} .$$

Supposons le point C' ainsi déterminé, nous pourrions poser :

$$\omega_1 = 2q \int_0^{x'} S(t) dt = 2qH(x') ,$$

$$\omega_2 = 2q \int_0^{y'} S(t) dt = 2qH(y') ,$$

on peut alors considérer le vecteur ω_1 comme le vecteur résultant d'une infinité de paires de vecteurs chargeant uniformément le segment $C'D$ avec la densité de charge q par unité de longueur et en même temps le vecteur ω_2 sera le résultat d'une charge de vecteurs infiniment petits chargeant le vecteur $C'E$ avec la même densité de charge; le vecteur résultant de ω_1 et de ω_2 sera donc un vecteur ω_3 perpendiculaire à AB et dont le pied C'' est au milieu de DE ; ce vecteur ω_3 est alors déterminé par la relation :

$$\omega_3 = 2q \int_0^{x'+y'} S(t) dt = 2qH(x'+y') ,$$

d'ailleurs, si x'' et y'' sont les distances du point C'' à A et B , on a évidemment;

$$x'' = y' , \quad y'' = x' ,$$

en sorte que nous avons

$$\frac{\omega_1}{H(y'')} = \frac{\omega_2}{H(x'')} \quad \text{avec la condition } x'' + y'' = AB = s ,$$

comme nous avons tout à l'heure

$$\frac{\omega_1}{R(y)} = \frac{\omega_2}{R(x)} \quad \text{avec la condition } x + y = s ,$$

mais de plus le point C'' est le pied de vecteur résultant de ω_1 et de ω_2 comme le point C est le pied du vecteur résultant des deux mêmes; donc C et C'' se confondent et nous concluons avec $x'' = x$, et $y'' = y$

$$\frac{R(y)}{R(x)} = \frac{H(y)}{H(x)} ,$$

et comme x et y peuvent être pris quelconques avec ω_1 et ω_2 , il en résulte que les fonctions $R(x)$ et $H(x)$ sont proportionnelles l'une à l'autre.

La formule d'addition de la fonction H est donc applicable à la fonction R et nous avons alors comme conséquence des proportions

$$\frac{\omega_1}{R(y)} = \frac{\omega_2}{R(x)} = \frac{\omega_3}{R(x+y)},$$

la relation

$$\omega_3 = \omega_1 S(x) + \omega_2 S(y).$$

REMARQUE. — Le raisonnement précédent eut pu s'appliquer mot pour mot, par l'emploi d'une sphère, aux vecteurs concourants et nous aurions trouvé alors pour la fonction analogue de $R(x)$ sur la sphère $\psi(\alpha)$ la même proportionnalité :

$$\begin{aligned} \psi(\alpha) &= h(\alpha) \cdot m = \sin \alpha \cdot m \\ R(x) &= H(x) \cdot m'. \end{aligned}$$

Il reste à déterminer la constante m' car m est évidemment égal à 1.

Pour y parvenir exprimons que la vitesse d'un point situé sur le vecteur ω_3 résultant des vecteurs qui représentent les vitesses des rotations concourantes ω_1 et ω_2 est nul ; en nommant x et y les distances d'un point de ω_3 aux droites ω_1 et ω_2 qui font avec ω_1 et ω_2 les angles α_1 et α_2 nous aurons :

$$\frac{R(x)}{\sin \alpha_1} = \frac{R(y)}{\sin \alpha_2},$$

car

$$\omega_1 R(x) = \omega_2 R(y)$$

et par la composition des vecteurs concourants

$$\omega_1 \sin \alpha_1 = \omega_2 \sin \alpha_2,$$

puisque

$$\omega_1 H(\alpha_1) = \omega_2 H(\alpha_2)$$

par la méthode d'Archimède.

Rapprochons ce résultat du théorème fondamental sur le dièdre.

Considérons une droite OA qui tourne d'un angle infiniment petit autour d'un axe OI , soit OA' la position infiniment voisine de OA ; AA' est la corde d'un arc de cercle de centre I ; soit de même B un autre point de OA qui vient

en B' par la même rotation, BB' est la corde d'un arc de cercle de centre J situé sur l'axe OI et d'après la propriété du dièdre, les angles AOA' et BOB' angles rectilignes d'un même dièdre sont égaux.

D'autre part, dans le triangle isocèle AOA' , et lorsque la rotation considérée tend vers zéro, on a :

$$\text{Lim} \frac{AA'}{\text{angle } AOA'} = R(OA), \quad \text{Lim} \frac{AA'}{\text{angle } AIA'} = R(AI);$$

d'où, en divisant ces égalités membre à membre

$$\text{Lim} \frac{\text{angle } AIA'}{\text{angle } AOA'} = \frac{R(OA)}{R(OI)} = \frac{R(OB)}{R(OI)}, \quad \text{puisque } \widehat{AIA'} = \widehat{BJB'}.$$

Ainsi donc le rapport $\frac{R(OI)}{R(OA)}$ est une simple fonction de l'angle $\alpha = AOI$; désignons cette fonction par $f(\widehat{AOI})$.

En rapprochant ce résultat de la proportion tout à l'heure obtenue, savoir

$$\frac{R(x)}{\sin \alpha_1} = \frac{R(y)}{\sin \alpha_2}$$

nous aurons :

$$\frac{f(\alpha_1)}{\sin \alpha_1} = \frac{f(\alpha_2)}{\sin \alpha_2},$$

c'est-à-dire $f(\alpha) = \sin \alpha \cdot n$, n étant constant.

Or, pour $\alpha = 1^{\text{droit}}$, $f(\alpha) = 1$, comme $\sin \alpha$; donc $n = 1$.

Démontrons enfin que $m' = 1$, c'est-à-dire, en écartant le cas euclidien, qu'une fois l'unité de longueur droite adoptée de manière que

$$S(x) = \begin{cases} \text{soit } \cos x \\ \text{soit } \cos \text{ hyp. } x \end{cases}$$

on aura

$$R(x) = H(x) = \int_0^x S(z) dz,$$

il n'y a d'ailleurs besoin de démontrer le théorème que dans la géométrie de la droite ouverte. Pour cela considérons sur une sphère déterminée un petit cercle de la sphère dont 2 rayons sphériques PA et PB issus du pôle P font entre eux

l'angle α , soit l la longueur de l'arc de ce petit cercle intercepté, si r est le rayon de la sphère, on a :

$$\frac{l}{R(r)} = \sin \left(\frac{AP}{R(r)} \right) \alpha .$$

Si les rayons AP et PB deviennent infiniment petits on pourra donc écrire en vertu des résultats déjà acquis :

$$\text{Lim } \frac{l}{\text{corde AP}} = \alpha .$$

Or si on projette la figure sur le plan du petit cercle, si P'A est la projection de la corde AP, on a :

$$\text{Lim } \frac{\text{corde PA}}{P'A} = 1 , \quad \text{donc aussi,} \quad \text{Lim } \frac{l}{P'A} = \alpha ;$$

or

$$l = H(P'A) \cdot \alpha \cdot m' ,$$

et comme $\frac{H(P'A)}{P'A}$ a pour limite 1 quand P'A tend vers zéro, on a

$$\text{Lim } \frac{l}{P'A} = \alpha \cdot m' ,$$

d'où, en comparant les deux limites de $\frac{l}{P'A}$, on conclut $m' = 1$.

REMARQUE. — Dans la géométrie de la droite ouverte et dans un triangle plan qui a deux côtés infiniment petits le déficit de la somme des angles à 2 angles droits est infiniment petit.

IV. — Rotations relatives autour d'axes quelconques.

L'étude déjà faite d'un système de rotations relatives autour d'axes concourants fournit un lemme important qui nous permettra d'aller plus loin.

LEMME FONDAMENTAL. — Soient U_1 et U_2 deux droites actuellement données et ne se coupant pas ; considérons un premier corps solide S_1 animé d'une rotation uniforme de vitesse angulaire ω_1 autour de U_1 , considérons la droite Δ_2 de ce solide qui coïncidait avec U_2 à l'époque t , et envisageons par rapport au solide S_1 un second solide S_2 tournant sur S_1 avec une vitesse angulaire constante ω_2 ; soit un certain point

du solide S_2 , défini par sa position A à l'époque t ; à l'époque t' ce point coïncide avec un certain point du solide S_1 qui à l'époque t' sera venu en B, si on donne alors au point B la rotation relative qu'il doit éprouver autour de la position de Δ_2 à l'époque t' avec vitesse angulaire ω_2 le point B vient en C; C sera la position à l'époque t' occupée par le point du solide S_2 qui était en A à l'époque t .

D'autre part, considérons le vecteur issu de A qui représente la vitesse linéaire due à une rotation de vitesse angulaire ω_1 autour de U_1 ; considérons encore le vecteur issu de B qui représente la vitesse linéaire qu'aurait le point A s'il tournait autour de U_2 avec la vitesse angulaire ω_2 ; formons le vecteur *résultant* de ces deux vecteurs concourants et multiplions le par la durée $t' - t$, nous obtenons ainsi un vecteur AD; je dis que l'extrémité D de ce vecteur sera séparée du point C par un écart infiniment petit d'ordre supérieur à l'ordre de $t' - t$.

DÉMONSTRATION. — Observons d'abord que si Ω_3 est le vecteur résultant de deux vecteurs concourants en O, Ω_1 et Ω_2 et que si M est un point de la perpendiculaire élevée de M au plan des trois vecteurs Ω la vitesse v_3 de M due à la rotation Ω_3 sera un vecteur égal au vecteur résultant des deux vecteurs v_1 et v_2 qui représenteraient les vitesses linéaires qui seraient dues aux rotations isolées Ω_1 et Ω_2 . (Conséquence des résultats déjà acquis et de l'invariance de l'opération vectorielle; soit alors $dt = t' - t$ une durée infiniment petite; du mode d'équivalence des vecteurs concourants interprétés par des vitesses de rotation on conclut que le vecteur $V_3 dt$ est la limite de la droite qui ferme le contour de deux vecteurs successifs MN et NN', lorsque ce contour se modifie à tout instant de la durée dt de la manière suivante :

N est la position occupée à l'époque $t + dt$ par un point de S_1 qui était en M à l'époque t ; le segment NN' est la corde d'un déplacement relatif de S_2 par rapport à S_1 , et tournant autour d'une droite Δ_2 . Cette corde variable est-elle même entraînée avec le solide S_1 pendant que le point de départ N de cette corde décrit d'un mouvement continu l'arc dont MN est la corde dans la rotation Ω_1 ; or pendant le déplacement

de S_1 nous pouvons envisager les segments NM et NN' comme issus du point mobile N et *repérés* par rapport à un trièdre de sommet N et qui serait invariablement lié au solide S_1 ; or la droite NM issue de N et ainsi *repérée* TEND vers une droite déterminée de S_1 qui est la tangente en N à l'arc MN , et de même la droite NN' issue de N et ainsi *repérée* tend vers une droite déterminée de S_1 perpendiculaire au plan de N et de la droite Δ_2 qui à l'époque t porte Ω_2 ; ces deux droites limites coïncident d'ailleurs à l'époque t avec les vecteurs distincts V_1 et $-V_2$; on conclut de là aisément par nos lemmes de continuité que :

1. le plan MNM' qui pivote sur M fait un angle infiniment petit avec le plan des vecteurs V_1 et V_2 ;

2. l'angle que fait la droite $\overline{NN'}$ avec le vecteur \overline{NM} est infiniment peu différent du supplément de l'angle de V_2 et de V_1 ;

3. l'écart entre le point N' et l'extrémité du vecteur $V_3 dt$ est infiniment petit du second ordre;

4. l'extrémité du vecteur $V_3 dt$ et le point où vient l'extrémité du vecteur $V_2 dt$ par une translation $V_1 dt$ d'axe V_1 sont séparés par un écart infiniment petit du second ordre.

Nous pouvons maintenant achever la démonstration du lemme.

Nous prendrons comme vecteurs V_1 et V_2 les vitesses linéaires dues aux rotations isolées ω_1 sur U_1 et ω_2 sur U_2 .

Ces vecteurs V_1 et V_2 peuvent être réalisés comme vitesses linéaires dues à deux rotations concourantes Ω_1 et Ω_2 en un point O de la perpendiculaire élevée de M au plan de V_1 et de V_2 . D'autre part en considérant les positions relatives de S_1 tournant autour de U_1 puis de δ_2 tournant autour de Δ_2 nous voyons que les cordes $M\nu$ et $\nu\nu'$ de ces deux déplacements relatifs peuvent encore être repérées par rapport à un trièdre de sommet ν lié au solide S_1 , or bien que ce contour variable $M\nu\nu'$ soit différent du contour variable MNN' envisagé tout à l'heure, il possède, dans ses déplacements de pivotement sur ν dans S_1 et de pivotement sur M dans l'espace fixe, les propriétés suivantes :

1. la droite $M\nu$ pivotant sur M tend vers la droite du vecteur V_1 ;

2. La corde $\nu\nu'$ pivotant sur ν dans S_1 tend vers une droite de S_1 qui à l'époque t est dirigée suivant la droite qui porte le vecteur V_2 ;

3. enfin par les lemmes de continuité le plan de contour $M\nu\nu'$ et le plan de V_1 et V_2 font un angle infiniment petit ;

4. par les mêmes lemmes le point ν' est à un écart du second ordre du point où vient l'extrémité du vecteur V_2 dt subissant la translation dont l'axe est V_1 dt et dont l'étendue centrale est V_1 dt donc enfin le vecteur $\frac{\overrightarrow{M\nu'}}{dt}$ issu de M a pour valeur limite le vecteur V_3 issu de M . C. Q. F. D.

REMARQUE. — Le cas où les vecteurs V_1 et V_2 seraient dans un même plan exigerait une légère modification de la démonstration.

COROLLAIRE. — Le vecteur $\lim. \frac{M\nu'}{dt} = V_3$ est indépendant de l'ordre dans lequel sont envisagés les vecteurs ω_1 et ω_2 portés par U_1 et par U_2 donc :

THÉORÈME 15. — Dans le mouvement qui résulte de deux rotations relatives autour de deux axes donnés à l'époque t tout point du second solide défini par sa position à l'époque t a une vitesse indépendante de l'ordre des emboitements des solides entraînés.

THÉORÈME 16. — Le théorème précédent se généralise de lui-même pour le cas de n rotations relatives quelconques.

THÉORÈME 17. — La vitesse linéaire d'un point du solide S_n défini par sa position à l'époque t est le vecteur résultant des vecteurs qui représentent pour les mêmes points les vitesses linéaires dues aux rotations *isolées* $\omega_1, \omega_2, \dots$ portées par les axes U_1, U_2, \dots etc.

Définition des systèmes de vecteurs équivalents. — Le système des vecteurs vitesses de rotation, $\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_n$, portés par les droites U_1, U_2, \dots, U_n définit donc, dans une composition de mouvements relatifs, *une distribution des vitesses* qui à l'époque t est indépendante de l'ordre dans lequel sont envisagés ces vecteurs, tout vecteur ω_i peut d'ailleurs, sans changer *la distribution des vitesses* dans l'espace envisagé à l'épo-

que t , être décomposé en vecteurs concourants, en l'un quelconque des points de la droite qui porte ce vecteur.

Enfin, par la nature même des vecteurs vitesses de rotation, une paire de deux vecteurs égaux et contraires, portés par une même droite, mais non immédiatement appliqués au même point, forment, au point de vue de la distribution des vitesses un ensemble équivalent à zéro, c'est-à-dire un ensemble *en équilibre*; une telle paire se nomme *paire de vecteurs mutuels*. Nous pouvons donc enfin énoncer le théorème intéressant que voici :

THÉORÈME 18. — Il existe des systèmes de vecteurs *équivalents* et cette équivalence jouit des propriétés suivantes :

1. Tout système de vecteurs reste équivalent à lui-même quand on lui ajoute ou lui retranche un nombre quelconque de paires de systèmes de deux vecteurs mutuels ;

2. un système de vecteurs concourants équivaut toujours à un vecteur résultant déterminé comme nous l'avons vu ;

3. Un système de deux vecteurs ne peut équivaloir à zéro, (c'est-à-dire produire une distribution de vitesses nulles) que si ces vecteurs forment une paire de vecteurs mutuels.

Ces propriétés vont nous permettre d'achever la trigonométrie plane.

V. — Réduction de Poinso et Trigonométrie plane.

Soient V un vecteur, et O un point particulier de l'espace d'ailleurs quelconque, soit H le pied d'une perpendiculaire abaissée de O sur V , et soit H' le point symétrique de H par rapport au point O . Considérons le vecteur V comme appliqué en H ; remplaçons d'abord le vecteur V_H par les vecteurs $\left(\frac{1}{2} V\right)_H$, $\left(\frac{1}{2} V\right)_H$, puis appliquons au point H' deux vecteurs $W_{H'}$ et $-W_{H'}$, perpendiculaires à OH dans le plan (O, V_H) et égaux respectivement à $\frac{1}{2} V_H$ et à $-\frac{1}{2} V_H$; c'est permis puisque $W_{H'}$ et $-W_{H'}$ s'équilibrent. Soit x la distance OH .

Les vecteurs $\left(\frac{1}{2} V\right)_H$ et $+ W_{H'}$ se composent en un vecteur unique passant par O perpendiculaire à OH et égal à $V.S(x)$; et il reste un groupe de deux vecteurs, perpendiculaires aux extrémités d'une même droite, égaux, et de sens opposés c'est ce que nous nommerons un couple; la droite menée par O perpendiculaire au plan du couple est dite l'axe du couple; si sur l'axe du couple on porte le produit $2VR(x)$ dans un sens pour lequel la rotation que suscite l'idée du couple soit orientée par une convention choisie une fois pour toutes (rotation droite, gauche par exemple); ce segment se nomme *le moment du couple*; x est le bras de levier du couple.

Moyennant ces définitions la transformation précédente peut ainsi s'énoncer :

THÉORÈME 19. — Tout vecteur V équivaut à un certain vecteur passant par O et à un couple dont l'axe passe aussi par le point O.

THÉORÈME 20. — Deux couples de même axe et de sens contraire équivalent à zéro si leurs vecteurs perpendiculaires à une même droite sont en raison inverse des fonctions R de leurs bras leviers.

DÉMONSTRATION. — Soient P_1, Q_1 les vecteurs du premier couple appliqués aux points respectifs A_1 et B_1 soient P_2, Q_2 les vecteurs du second couple appliqué respectivement aux points A_2 et B_2 . A_2 et A_1 sont d'un même côté de O, mais P_1 et P_2 sont perpendiculaires à OD_1 et de sens contraires, les vecteurs P_1 et P_2 ont un vecteur résultant \mathcal{C} passant par O car si x et y sont les demi bras de levier des deux couples on a, par hypothèse :

$$\frac{P_1}{R(y)} = \frac{P_2}{R(x)} = \frac{\mathcal{C}}{R(x+y)}$$

or, par un demi tour exécuté autour de l'axe commun de leurs couples le vecteur \mathcal{C} résultant de P_1 et de P_2 se change dans le vecteur \mathcal{C}' résultant de Q_1 et de Q_2 ; mais \mathcal{C} et \mathcal{C}' , égaux et directement contraires, s'équilibrent.

THÉORÈME 21. — Deux couples qui ont même moment sont équivalents.

THÉORÈME 22. — Si plusieurs couples ont des axes concourants, ces couples se composent en un seul dont le moment est un vecteur résultant des moments des couples composants.

THÉORÈME 23. — Un système quelconque de vecteurs peut toujours se réduire à un vecteur unique passant par O et à un couple dont l'axe passe par O ; et le système proposé ne peut équivaloir à zéro que si ces deux derniers éléments se réduisent *séparément* à zéro l'un et l'autre.

Ceci est une conséquence de la réduction même et du caractère (3) de l'équivalence.

Telle est la réduction que nous appelons la réduction de POINSOT; Poinsot le premier la fit connaître dans la géométrie d'Euclide.

THÉORÈME 24. *La réduction de Poinsot renferme la trigonométrie plane.*

DÉMONSTRATION. — Considérons un vecteur porté par la droite AB , et soit C un troisième point quelconque de l'espace; si nous exprimons que le vecteur V dirigé de B vers A dans le triangle ABC fournit dans la réduction de Poinsot les mêmes éléments, lorsque ce vecteur successivement considéré comme appliqué en A puis en B , est préalablement décomposé sur son point d'application en deux vecteurs dont l'un est sur la droite qui réunit ce point d'application au point C et dont l'autre est perpendiculaire à cette droite; soit B l'angle du triangle ABC qui a son sommet en B , soit A l'angle du triangle qui a son sommet en A , soit enfin C l'angle du triangle qui a son sommet en C , l'identité des deux réductions de Poinsot, ci-dessus mentionnées, nous donne, en désignant par a, b, c les côtes du triangle:

$$(e) \begin{cases} \sin A.R(b) = \sin B.R(a) , \\ S(b) \sin A = \sin B \cos CS(a) + \sin C \cos B , \\ \cos A = \sin B \sin CS(a) - \cos B \cos C . \end{cases}$$

Ce système e ne change pas par la permutation du groupe (a, A) avec le groupe (b, B) ; de plus en vertu des identités

$$S^2(x) - \varepsilon R^2(x) = 1 , \quad \sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1 ,$$

les trois équations e se réduisent aux deux dernières du groupe.

Ces groupes peuvent être permutés, mais ils se réduisent en définitive à trois relations, par exemple aux trois suivantes :

$$S(a) = \frac{\cos A + \cos B \cos C}{\sin B \sin C},$$

$$S(b) = \frac{\cos B + \cos C \cos A}{\sin C \sin A},$$

$$S(c) = \frac{\cos C + \cos A \cos B}{\sin A \sin B}.$$

Le cas de $S(x) \equiv 1$ donne la géométrie d'Euclide, mais dans ce cas particulier les trois relations précédentes se réduisent à une et il faut grouper autrement les relations si on veut obtenir un groupe de 3 relations essentielles.

Mais dans tous les cas la réduction de Poinot a fourni la trigonométrie plane, comme l'étude du pivotement sphérique nous avait donné, après la composition des rotations concourantes, les formules de la trigonométrie sphérique.

V. — Statique et Cinématique réunies.

Bien que seule l'interprétation des vecteurs comme axes et vitesses de rotations relatives nous ait conduits à démontrer l'existence de systèmes équivalents de vecteurs, la méthode employée montre que tout mode d'équivalence entre divers systèmes de vecteurs, qui satisfait aux conditions logiques énoncées plus haut, entraîne 3 types possibles pour les relations métriques dans l'espace ; mais, une fois adopté le type d'espace, après particularisation des propriétés métriques, il n'y a plus qu'un mode possible d'équivalence entre les divers systèmes de vecteurs.

Ainsi donc les *vecteurs forces* se réduisent et se composent *exactement comme les vecteurs vitesses de rotations*.

Voici des conséquences intéressantes de ces faits :

Nous avons vu plus haut que les moments des couples de vecteurs possèdent à leur tour les propriétés essentielles

de vecteurs simples ; mais ces vecteurs d'un nouveau genre admettant aussi des couples, il y aura lieu de se demander ce que représentent *ces couples de couples* par rapport aux vecteurs du premier genre.

Voici la réponse très simple à cette question, réponse dont la justification s'apercevra d'une manière intuitive par la théorie des vecteurs perpendiculaires à une même droite. Ainsi donc :

THÉORÈME 25. — ε désignant un nombre égal à 1 dans la géométrie de la droite ouverte non euclidienne égal à -1 dans la géométrie de la droite fermée, égal à zéro dans la géométrie d'Euclide, et si on prend comme mesure du moment le double produit du vecteur multiplié par la fonction R du demi bras de levier, un couple de moments, dont le moment nouveau est μ équivaut à un vecteur V porté sur l'axe du couple du second genre et l'on a

$$\mu = -\varepsilon V,$$

en sorte que dans l'espace d'Euclide un couple de couples équivaut à zéro.

REMARQUE. — Ce théorème fournit en Statique non euclidienne une détermination très simple *de l'axe central* d'un système de vecteurs.

VI. — La notion du travail et le moment mutuel de deux systèmes de vecteurs.

On a vu que la vitesse de tout point d'un solide animé de diverses rotations relatives est un vecteur égal au vecteur résultant des vecteurs qui représentent les vitesses dues aux rotations isolées ; considérons alors deux systèmes de vecteurs S et S' , faisons représenter à l'un d'eux un système de forces, et à l'autre un système de rotations relatives et considérons le déplacement infiniment petit Σ d'un solide qui résulte de ces rotations relatives pendant le temps dt soit F une des forces de S ; soit $v dt$ le déplacement infiniment

petit de son point d'application, le travail de la force F par rapport à ce déplacement est

$$\Sigma F v dt \cos (\widehat{F, V}) = \mu dt ;$$

ce travail est encore égal à la somme des produits des rotations par *le moment* de chaque force par rapport à l'axe de cette rotation, cette somme étant multipliée par dt ; cette seconde définition devra donc être indépendante des rôles attribués aux deux groupes de vecteurs; μ s'appelle le moment du groupe des deux systèmes de vecteurs.

THÉORÈME 26. — Le moment d'un groupe de deux systèmes de vecteurs demeure invariable quand on remplace l'un ou l'autre des systèmes par un système équivalent.

DERNIÈRE REMARQUE. — Pour terminer cette genèse cinématique de la géométrie naturelle il resterait à établir que tout mouvement continu quelconque d'un solide dont *trois points* formant triangle ont à un moment donné des vitesses, possède à ce même moment une distribution générale de vitesses; la démonstration est facile, et doit précéder c'est-à-dire dominer l'emploi d'aucun système de coordonnées spécialisé.

Mais je m'arrête ici, mon but était de préciser avec une rigueur complète le rôle des fonctions angulaires dans la géométrie naturelle. Ce rôle éclairé par l'idée d'Archimède et l'idée de Poincaré, nous conduit avec la plus grande simplicité à ce résultat: qu'il existe trois structures possibles de l'espace et trois seulement, compatibles avec la symétrie et les déplacements des solides.

Jules ANDRADE (Besançon).