

## II. Rotations finies autour d'axes concourants. Rotations relatives.

Objekttyp: **Chapter**

Zeitschrift: **L'Enseignement Mathématique**

Band (Jahr): **8 (1906)**

Heft 1: **L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE**

PDF erstellt am: **13.09.2024**

### **Nutzungsbedingungen**

Die ETH-Bibliothek ist Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Inhalten der Zeitschriften. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern. Die auf der Plattform e-periodica veröffentlichten Dokumente stehen für nicht-kommerzielle Zwecke in Lehre und Forschung sowie für die private Nutzung frei zur Verfügung. Einzelne Dateien oder Ausdrucke aus diesem Angebot können zusammen mit diesen Nutzungsbedingungen und den korrekten Herkunftsbezeichnungen weitergegeben werden. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Die systematische Speicherung von Teilen des elektronischen Angebots auf anderen Servern bedarf ebenfalls des schriftlichen Einverständnisses der Rechteinhaber.

### **Haftungsausschluss**

Alle Angaben erfolgen ohne Gewähr für Vollständigkeit oder Richtigkeit. Es wird keine Haftung übernommen für Schäden durch die Verwendung von Informationen aus diesem Online-Angebot oder durch das Fehlen von Informationen. Dies gilt auch für Inhalte Dritter, die über dieses Angebot zugänglich sind.

THÉORÈME 6. — La longueur  $L$  d'un arc de cercle dont l'angle au centre est  $\alpha$ , est déterminé, est une fonction *continue* du rayon  $r$  de l'arc et l'on peut écrire

$$(5) \quad L = \alpha R(r), \quad \text{la fonction } R \text{ est continue.}$$

THÉORÈME 7. — Ce théorème s'applique aussi sur la sphère, en évaluant angulairement les longueurs d'arcs de grand cercle et l'on a

$$(6) \quad l = \alpha \psi(r), \quad l \text{ et } r \text{ étant évaluées angulairement.}$$

REMARQUE. — Le rapport d'un arc infiniment petit à sa corde tend vers l'unité.

## II. Rotations finies autour d'axes concourants. Rotations relatives.

THÉORÈME 8. — Quand un solide éprouve un déplacement autour d'un point fixe, ce déplacement peut être obtenu par une rotation convenable autour d'un axe convenable passant par ce point fixe.

THÉORÈME 9. — Quand un solide fixé par un point  $O$  éprouve une rotation  $\alpha_1$  autour d'un axe  $U_1$  passant par ce point ; puis une rotation  $\alpha_2$  autour d'un axe  $U_2$  passant par ce point, le déplacement final du solide peut être obtenu par une rotation unique  $\alpha_3$  autour d'un axe  $U_3$  passant par ce même point.

En représentant les axes par leurs images sphériques *orientées*, sur une sphère de centre  $O$  la combinaison des déplacements successifs (1) et (2) est définie comme il suit (toutes les rotations ne dépassant pas un demi-tour) : Par le premier pôle  $P_1$  menons un demi-arc de grand cercle  $P_1x$  faisant avec le demi-arc de grand cercle  $\overrightarrow{P_1P_2}$  un angle égal à la rotation  $-\frac{1}{2}\alpha_1$  ; par le second pôle  $P_2$  menons un demi-arc de grand cercle  $P_2y$  faisant avec le demi-arc de grand cercle  $\overrightarrow{P_2P_1}$  l'angle  $+\frac{1}{2}\alpha_2$ .

Ces deux demi-arcs de grand cercle se coupent au point  $P_3$  et l'angle de  $\overrightarrow{P_3P_2}$  avec le prolongement de  $\overrightarrow{P_1P_3}$  est égal à  $+\frac{1}{2}\alpha_3$ .

*Définition des rotations relatives autour d'un point fixe.*  
 — Soient  $U_1, U_2, U_3, \dots$ , des droites concourantes envisagées dans l'ordre précité; considérons un premier solide  $S_1$  animé d'une rotation continue  $\alpha_1$  autour de  $U_1$ , puis, par rapport à ce solide  $S_1$ , considérons un second solide  $S_2$  en mouvement relatif de rotation continue et décrivant  $\alpha_2$  par rapport à une droite de  $S_1$  qui coïncidait avec  $U_2$  à l'époque  $t$ ; nous supposons que les rotations continues et simultanées  $\alpha_1$  et  $\alpha_2$  demeurent dans un rapport constant donné, on pourra poser par exemple  $\alpha_1 = \omega_1 (t' - t)$ ,  $\alpha_2 = \omega_2 (t' - t)$ , les constantes  $\omega_1$  et  $\omega_2$  seront alors les vitesses angulaires des deux rotations relatives considérées.

On considérera de même un troisième solide se détachant du solide  $S_2$  par une rotation continue  $\alpha_3$ , à vitesse constante  $\omega_3$  autour d'une droite de  $S_2$  qui à l'époque  $t$  coïncidait avec  $U_3$  et ainsi de suite.

Nous définissons ainsi par des emboîtements successifs de solides le mouvement d'un dernier solide  $S_n$  en mouvement relatif de rotation continue par rapport au solide précédent  $S_{n-1}$ , cette rotation s'exécutant autour d'une droite de  $S_{n-1}$ , qui coïncidait avec  $U_n$  à l'époque  $t$ . Le temps  $t$  ne joue ici que le rôle d'une variable indépendante.

A l'égard de ces mouvements on a les théorèmes suivants :

**THÉORÈME 10.** — Dans un mouvement de rotation uniforme chaque point d'un solide possède une vitesse à l'époque  $t$ , c'est-à-dire que si on envisage le déplacement  $MM'$  d'un point du corps durant le temps  $dt = t' - t$ , la direction  $MM'$  émanée de  $M$  tend vers une direction limite lorsque  $dt$  tend vers zéro et en même temps le rapport  $\frac{MM'}{dt}$  tend vers une valeur limite appelée *vitesse actuelle*.

**THÉORÈME 11.** — Quand un solide pivote sur un point fixe, si deux points particuliers du solide ont l'un et l'autre une vitesse actuelle, tous les autres points du solide ont aussi une vitesse actuelle; celle-ci est la même que si le solide allait à partir de l'époque  $t$  continuer à tourner d'une rotation uniforme autour d'un axe convenable; ce théorème est une conséquence des théorèmes 8 et 10.

Les théorèmes précédents rapprochés de la notion des mouvements relatifs de pivotement et des lemmes de continuité conduisent à cette conséquence importante.

THÉORÈME 12. — La combinaison de deux mouvements relatifs de rotation sur un même point pivot est au point de vue de la distribution des vitesses dans le dernier solide en mouvement, *indépendante de l'ordre dans lequel on a envisagé les droites*  $U_1 U_2$  *pour définir le mouvement combiné*; et la distribution des vitesses est la même que si le solide tournait avec une vitesse  $\omega_3$  autour d'un axe dont le pôle  $p_3$  sur une sphère concentrique au pivot et sur l'arc  $p_1 p_2$  qui joint les pôles séparés définis à l'époque  $t$ ; de plus en faisant  $x = p_1 p_3$ ,  $y = p_3 p_2$ ,  $z = x + y$ , on aura

$$(7) \quad \frac{\omega_1}{\psi(y)} = \frac{\omega_2}{\psi(x)} = \frac{\omega_3}{\psi(z)}.$$

COROLLAIRE. — Si donc on considère les *vecteurs* ou segments représentatifs des rotations  $\omega_1, \omega_2, \omega_3$  portés sur ces axes, *il existe une opération qui permet de déduire le troisième vecteur au moyen des deux premiers*, et le vecteur  $\omega_3$  est dans le plan des deux premiers.

THÉORÈME 13. — Lorsqu'un point  $M$  d'un solide éprouve par une rotation donnée un déplacement infiniment petit du premier ordre de  $M$  en  $M'$ , un point  $m$  voisin de  $M$  par un écart d'ordre supérieur au premier viendra en  $m'$  et l'écart  $M'm'$  sera infiniment petit d'ordre supérieur au premier.

THÉORÈME 14. — La combinaison de  $n$  rotations relatives concourantes définies plus haut est, au point de vue de la distribution des vitesses à l'époque  $t$ , indépendante de l'ordre qui a présidé à l'emboîtement des mouvements successifs.

COROLLAIRE. — Il existe une opération vectorielle définissant le vecteur *résultant* de plusieurs vecteurs donnés concourants, et cette opération jouit des propriétés suivantes :

1. L'opération est invariante (conséquence du théorème 9);
2. L'opération se réduit à l'addition algébrique des segments si les vecteurs sont portés par une même droite;
3. L'opération est commutative (indépendante de l'ordre);

4. L'opération est associative (plusieurs vecteurs composants sont remplaçables par leur vecteur résultant) ;

5. L'opération est continue ;

6. L'ensemble de deux vecteurs n'est équivalent à zéro que si ces vecteurs, portés par une même droite, sont égaux et contraires.

### III. — Composition des vecteurs.

#### *Composition des vecteurs concourants d'un plan.*

Nous allons indiquer l'interprétation analytique des faits qui précèdent. Soit  $F$  un vecteur, d'intensité  $f$ , émanant de  $O_1$  et défini dans un plan en *direction autour de ce point* par l'angle *orienté*  $\alpha$  que sa direction fait avec une droite  $OX$ .

Il résulte des propriétés de l'opération de composition des vecteurs que ce vecteur peut être décomposé en deux vecteurs  $X$  et  $Y$  agissant suivant  $Ox$  et  $Oy$  et que

$$X = f \cdot g(\alpha) \quad , \quad Y = f \cdot h(\alpha) \quad ,$$

$g$  et  $h$  désignant deux fonctions *continues* de l'angle  $\alpha$ .

L'invariance donne de suite les propriétés :

$$(I) \quad \left\{ \begin{array}{l} g(-\alpha) = g(\alpha) \quad , \quad h(-\alpha) = -h(\alpha) \quad , \\ g(\alpha + 1^{\text{dr}}) = -h(\alpha) \quad , \\ h(\alpha + 1^{\text{dr}}) = h(\alpha) \quad , \end{array} \right.$$

enfin l'associativité et l'invariance combinées, nous donnent après une rotation arbitraire du système des axes de repère :

$$(E) \quad \left\{ \begin{array}{l} g(u + v) = g(u)g(v) - h(u)h(v) \quad , \\ h(u + v) = h(u)g(v) + h(v)g(u) \quad . \end{array} \right.$$

Les propriétés (I) et (E) nous donnent de suite l'équation fonctionnelle

$$(8) \quad \left\{ \begin{array}{l} g(u + v) + g(u - v) = 2g(u)g(v) \quad , \\ \text{que nous associerons à la condition de continuité} \\ g(0) = 1 \quad . \end{array} \right.$$