# V. — Réduction de Poinsot et Trigonométrie plane.

Objekttyp: **Chapter**

Zeitschrift: **L'Enseignement Mathématique**

Band (Jahr): **8 (1906)**

Heft 1: **L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE**

PDF erstellt am: **12.07.2024**

que $t$, être décomposé en vecteurs concourants, en l'un quelconque des points de la droite qui porte ce vecteur.

Enfin, par la nature même des vecteurs vitesses de rotation, une paire de deux vecteurs égaux et contraires, portés par une même droite, mais non immédiatement appliqués au même point, forment, au point de vue de la distribution des vitesses un ensemble équivalent à zéro, c'est-à-dire un ensemble *en équilibre;* une telle paire se nomme *paire de vecteurs mutuels*. Nous pouvons donc enfin énoncer le théorème intéressant que voici :

Théorème 18. — Il existe des systèmes de vecteurs *équivalents* et cette équivalence jouit des propriétés suivantes :

1. Tout système de vecteurs reste équivalent à lui-même quand on lui ajoute ou lui retranche un nombre quelconque de paires de systèmes de deux vecteurs mutuels ;
2. un système de vecteurs concourants équivaut toujours à un vecteur résultant déterminé comme nous l'avons vu ;
3. Un système de deux vecteurs ne peut équivaloir à zéro, (c'est-à-dire produire une distribution de vitesses nulles) que si ces vecteurs forment une paire de vecteurs mutuels.

Ces propriétés vont nous permettre d'achever la trigonométrie plane.

## V. — Réduction de Poinsot et Trigonométrie plane.

Soient V un vecteur, et O un point particulier de l'espace d'ailleurs quelconque, soit H le pied d'une perpendiculaire abaissée de O sur V, et soit H′ le point symétrique de H par rapport au point O. Considérons le vecteur V comme appliqué en H ; remplaçons d'abord le vecteur $V_H$ par les vecteurs $\left(\frac{1}{2}V\right)_H$, $\left(\frac{1}{2}V\right)_H$, puis appliquons au point H′ deux vecteurs $W_{H'}$ et $-W_{H'}$, perpendiculaires à OH dans le plan $(O, V_H)$ et égaux respectivement à $\frac{1}{2}V_H$ et à $-\frac{1}{2}V_H$ ; c'est permis puisque $W_{H'}$ et $-W_{H'}$ s'équilibrent. Soit $x$ la distance OH.

Les vecteurs $\left(\frac{1}{2}\,V\right)_H$ et $+\,W_{H'}$ se composent en un vecteur unique passant par O perpendiculaire à OH et égal à $V.S(x)$; et il reste un groupe de deux vecteurs, perpendiculaires aux extrémités d'une même droite, égaux, et de sens opposés c'est *ce que nous nommerons un couple;* la droite menée par O perpendiculaire au plan du couple est dite l'axe du couple; si sur l'axe du couple on porte le produit $2VR(x)$ dans un sens pour lequel la rotation que suscite l'idée du couple soit orientée par une convention choisie une fois pour toutes (rotation droite, gauche par exemple); ce segment se nomme *le moment du couple; $x$* est le bras de levier du couple.

Moyennant ces définitions la transformation précédente peut ainsi s'énoncer :

Théorème 19. — Tout vecteur V équivaut à un certain vecteur passant par O et à un couple dont l'axe passe aussi par le point O.

Théorème 20. — Deux couples de même axe et de sens contraire équivalent à zéro si leurs vecteurs perpendiculaires à une même droite sont en raison inverse des fonctions R de leurs bras leviers.

Démonstration. — Soient $P_1$, $Q_1$ les vecteurs du premier couple appliqués aux points respectifs $A_1$ et $B_1$ soient $P_2$, $Q_2$ les vecteurs du second couple appliqué respectivement aux points $A_2$ et $B_2$. $A_2$ et $A_1$ sont d'un même côté de O, mais $P_1$ et $P_2$ sont perpendiculaires à $OD_1$ et de sens contraires, les vecteurs $P_1$ et $P_2$ ont un vecteur résultant $\mathfrak{T}$ passant par O car si $x$ et $y$ sont les demi bras de levier des deux couples on a, par hypothèse :

$$\frac{P_1}{R(y)} = \frac{P_2}{R(x)} = \frac{\mathfrak{T}}{R(x+y)},$$

or, par un demi tour exécuté autour de l'axe commun de leurs couples le vecteur $\mathfrak{T}$ résultant de $P_1$ et de $P_2$ se change dans le vecteur $\mathfrak{T}'$ résultant de $Q_1$ et de $Q_2$ ; mais $\mathfrak{T}$ et $\mathfrak{T}'$, égaux et directement contraires, s'équilibrent.

Théorème 21. — Deux couples qui ont même moment sont équivalents.

Théorème 22. — Si plusieurs couples ont des axes concourants, ces couples se composent en un seul dont le moment est un vecteur résultant des moments des couples composants.

Théorème 23. — Un système quelconque de vecteurs peut toujours se réduire à un vecteur unique passant par O et à un couple dont l'axe passe par O ; et le système proposé ne peut équivaloir à zéro que si ces deux derniers éléments se réduisent *séparément* à zéro l'un et l'autre.

Ceci est une conséquence de la réduction même et du caractère (3) de l'équivalence.

Telle est la réduction que nous appelons la réduction de Poinsot ; Poinsot le premier la fit connaître dans la géométrie d'Euclide.

Théorème 24. *La réduction de Poinsot renferme la trigonométrie plane.*

Démonstration. — Considérons un vecteur porté par la droite A B, et soit C un troisième point quelconque de l'espace ; si nous exprimons que le vecteur V dirigé de B vers A dans le triangle A B C fournit dans la réduction de Poinsot les mêmes éléments, lorsque ce vecteur successivement considéré comme appliqué en A puis en B, est préalablement décomposé sur son point d'application en deux vecteurs dont l'un est sur la droite qui réunit ce point d'application au point C et dont l'autre est perpendiculaire à cette droite ; soit B l'angle du triangle A B C qui a son sommet en B, soit A l'angle du triangle qui a son sommet en A, soit enfin C l'angle du triangle qui a son sommet en C, l'identité des deux réductions de Poinsot, ci-dessus mentionnées, nous donne, en désignant par $a$, $b$, $c$ les côtes du triangle :

$$(e)\left\{\begin{array}{l} \sin A . R(b) = \sin B . R(a) \ , \\ S(b) \sin A = \sin B \cos C S(a) + \sin C \cos B \ , \\ \cos A = \sin B \sin C S(a) - \cos B \cos C \ . \end{array}\right.$$

Ce système $e$ ne change pas par la permutation du groupe ($a$, A) avec le groupe ($b$, B) ; de plus en vertu des identités

$$S^2(x) - \varepsilon R^2(x) = 1 \ , \qquad \sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1 \ ,$$

les trois équations *e* se réduisent aux deux dernières du groupe.

Ces groupes peuvent être permutés, mais ils se réduisent en définitive à trois relations, par exemple aux trois suivantes :

$$S(a) = \frac{\cos A + \cos B \cos C}{\sin B \sin C},$$

$$S(b) = \frac{\cos B + \cos C \cos A}{\sin C \sin A},$$

$$S(c) = \frac{\cos C + \cos A \cos B}{\sin A \, . \, \sin B}.$$

Le cas de $S(x) \equiv 1$ donne la géométrie d'Euclide, mais dans ce cas particulier les trois relations précédentes se réduisent à une et il faut grouper autrement les relations si on veut obtenir un groupe de 3 relations essentielles.

Mais dans tous les cas la réduction de Poinsot a fourni la trigonométrie plane, comme l'étude du pivotement sphérique nous avait donné, après la composition des rotations concourantes, les formules de la trigonométrie sphérique.

## V. — Statique et Cinématique réunies.

Bien que seule l'interprétation des vecteurs comme axes et vitesses de rotations relatives nous ait conduits à démontrer l'existence de systèmes équivalents de vecteurs, la méthode employée montre que tout mode d'équivalence entre divers systèmes de vecteurs, qui satisfait aux conditions logiques énoncées plus haut, entraîne 3 types possibles pour les relations métriques dans l'espace ; mais, une fois adopté le type d'espace, après particularisation des propriétés métriques, il n'y a plus qu'un mode possible d'équivalence entre les divers systèmes de vecteurs.

Ainsi donc les *vecteurs forces* se réduisent et se composent *exactement comme les vecteurs vitesses de rotations.*

Voici des conséquences intéressantes de ces faits :

Nous avons vu plus haut que les moments des couples de vecteurs possèdent à leur tour les propriétés essentielles