# EXEMPLE SIMPLE D'UNE FONCTION CONTINUE N'AYANT PAS DE DÉRIVÉE POUR UNE INFINITÉ DE VALEURS DE LA VARIABLE

$$= \varphi(x, \infty) > \varphi(x, n) > \Phi(x, n) > \frac{x}{1+x}$$

$$[n, \mathrm{F}(x, n)] > [\infty, \mathrm{F}(x, \infty)] = 1 + x = [-\infty, \Phi(x, \infty)] > [-x, \Phi(x, n)]$$

$$\lim\,[\mathrm{F}(x, n) + \mathrm{F}(y, n) - \mathrm{F}(x + y + xy, n)] = 0^{1} \qquad (n = \infty)$$

De plus si $x$ est rationnel,

$$\lim\,(m, 1)^{\mathrm{F}(x,n)} = 1 + x, \qquad \text{(id.)}$$

*26.* Considérons la série dont les deux premiers termes sont C$x$, 1, et chacun des suivants alternativement moyen arithmétique et moyen géométrique des deux qui le précèdent immédiatement. Les termes de la suite tendent vers la limite $\frac{\mathrm{S}x}{x}$ (Gergonne).

A. Aubry (Beaugency, Loiret).

---

EXEMPLE SIMPLE D'UNE FONCTION CONTINUE N'AYANT PAS DE DÉRIVÉE POUR UNE INFINITÉ DE VALEURS DE LA VARIABLE

---

Lorsque le professeur explique à des débutants la notion de dérivée, il ne soulève pas devant eux la question de savoir si toute fonction continue a une dérivée. Il lui suffit de leur montrer que les fonctions qu'ils connaissent en ont une.

Mais, un peu plus tard, il devient peut-être temps de mettre en garde les élèves, qui faussement guidés par l'intuition, s'imagineraient que toute fonction continue a une dé-

---

[1] Cette relation s'obtient en cherchant l'expression de la limite de la quantité

$$[n, \mathrm{F}(x, n)]\,[n, \mathrm{F}(y, n)] - [n, \mathrm{F}(x + y + xy, n)] .$$

On en tire, en écrivant par définition $\mathrm{F}(a - 1, \infty) = \mathrm{L}a$,

$$\mathrm{L}a + \mathrm{L}b = \mathrm{L}(ab) .$$

rivée, puisque toute courbe a une tangente et tout mouvement une vitesse. Il est vrai que, ce faisant, ils ne feraient que la même erreur qu'ont faite tous les mathématiciens pendant près de deux siècles ; et ainsi, leur faute serait, jusqu'à un certain point, légitime. Mais il est légitime aussi de chercher à la corriger.

Malheureusement, les exemples de fonctions continues sans dérivées que l'on trouve dans les ouvrages classiques ne sont pas simples [1], et il n'est pas à supposer que les élèves se les assimilent. On trouvera donc peut-être quelque intérêt à en rencontrer ici un tout élémentaire.

Soit $a$ un nombre réel, compris entre 0 et 1.

Dans l'intervalle de 0 à 1, intercalons le nombre $a$ qui divise cet intervalle dans le rapport $\frac{a}{1-a}$. Divisons chacun des deux intervalles formés dans le même rapport, nous intercalons ainsi le nombre $a^2$ dans le premier intervalle, et

$$a + a(1-a)$$

dans le second. Puis nous divisons dans le même rapport chacun des quatre intervalles formés, et ainsi de suite. On démontre facilement que les intervalles formés tendent tous vers zéro. (Car au bout de $n$ opérations, chacun des intervalles formés est plus petit que le plus grand des deux nombres $a^n$, $(1-a^n)$. Les nombres

$$0, 1, a, a^2, a + a(1-a), \ldots..$$

extrémités des intervalles ainsi formés forment un ensemble E. Cet ensemble contient une infinité d'éléments, *il y a une infinité d'éléments de E dans tout intervalle compris dans l'intervalle* [2] *de 0 à 1.*

---

[1] Voir par exemple : B. NIEWENGLOWSKI. Cours d'algèbre, 2e éd., t. 2, p. 464, Paris, Armand Colin, 1902.

Je parle, bien entendu, de fonction continue, n'ayant pas de dérivée pour une *infinité* de valeurs de la variable. S'il ne s'agit que d'un exemple de fonction continue n'ayant par de dérivée pour *une* valeur de la variable, voici un exemple bien simple et bien connu : la fonction égale à $x \sin \frac{1}{x}$ pour $x \neq 0$, et à 0 pour $x = 0$ est continue pour $x = 0$ et n'a pas de dérivée pour cette valeur de la variable.

[2] L'ensemble E est *dense* dans l'intervalle de 0 à 1.

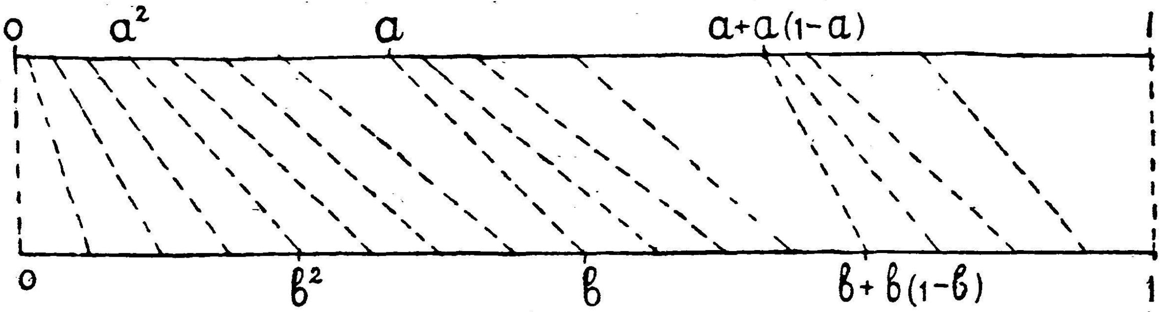
Recommençons maintenant les mêmes opérations, mais en partant d'un nombre $b$ différent de $a$.

Ce qui donne un ensemble E′.

Au nombre

| | | | |
|---|---|---|---|
| 0 de l'ensemble E | faisons correspondre le nombre | 0 de l'ensemble E′ | |
| 1 | » | 1 | » |
| $a$ | » | $b$ | » |
| $a^2$ | » | $b^2$ | » |
| $a + a(1-a)$ | » | $b + b(1-b)$ | » |

et ainsi de suite ; autrement dit, à tout élément de l'ensemble E, faisons correspondre celui de l'ensemble E′ qui a été obtenu après le même nombre d'opérations. (Voir la figure sur laquelle on a supposé $a = \frac{1}{3}$, $b = \frac{1}{2}$).




Si l'on appelle $x$, un élément de E, et $y$ l'élément correspondant de E′ ; $y$ est une fonction de $x$ *définie pour toutes les valeurs de $x$ qui font partie de E, et cette fonction est évidemment croissante.*

On en déduit une fonction de $x$, *définie pour toutes les valeurs de $x$ comprises entre 0 et 1.*

En effet soit $x$ une telle valeur. Si elle fait partie de l'ensemble E, la valeur correspondante de $y$ vient d'être définie. Sinon soit $x_n\, x'_n$ l'intervalle dans lequel se trouve $x$ après $n$ opérations. Considérons $y_n\, y'_n$ correspondant à $x_n\, x'_n$. Les extrémités $y_n$ et $y'_n$ se rapprochent indéfiniment quand $n$ croit indéfiniment ; d'ailleurs $y_n$ ne décroît jamais ; donc $y_n$ et $y'_n$ ont une limite commune $y$, c'est cette limite qui sera la valeur de la fonction correspondant à la valeur $x$ de la variable.

Cette fonction est évidemment *croissante.*

Je dis qu'elle est *continue* pour toute valeur $x$ de la variable.

En effet soit $y$ la valeur correspondante de la fonction. Donnons-nous un nombre positif $\alpha$, et considérons la subdivision poussée jusqu'à ce que $y-\alpha$, $y$, $y+\alpha$ ne soient plus dans le même intervalle. Soit alors $y_n\, y'_n$ l'intervalle dans lequel est $y$. On voit que si $x$ ne sort pas de l'intervalle $x_n\, x'_n$, la valeur de $y$ ne peut sortir de l'intervalle $y_n\, y'_n$ ; donc sa variation est plus petite que $\alpha$ ; donc la fonction $y$ continue.

Nous allons maintenant montrer que *pour toutes les valeurs de $x$ appartenant à l'ensemble E, la fonction $y$ n'a pas de dérivée.*

Poussons la subdivision jusqu'au moment où $x$ apparaît. Soit alors $x\, x'$ l'intervalle qui admet $x$ comme extrémité *inférieure.*

Entre $x$ et $x'$ on intercale un nombre $x''$, entre $x$ et $x''$ un nombre $x'''$ et ainsi de suite.

Soient $y$, $y'$, $y''$ ... les valeurs correspondantes de $y$. On a

$$
\begin{array}{ll}
x'' \;-x = a(x'-x)\,, & y''\;-y = b(y'-y)\;; \\
x''' \;-x = a(x''-x) = a^2(x'-x)\,, & y'''\;-y = b(y''-y) = b^2(y'-y)\,, \\
\cdots & \cdots \\
x^{(n)} - x = a^{n-1}(x'-x)\,, & y^{(n)} - y = b^{n-1}(y'-y)\,, \\
\cdots & \cdots
\end{array}
$$

Donc

$$
\frac{y''\;-y}{x''\;-x} = \frac{b}{a}\;\frac{y'-y}{x'-x}\,,
$$

$$
\frac{y'''\;-y}{x'''\;-x} = \left(\frac{b}{a}\right)^2\;\frac{y'-y}{x'-x}\,,
$$

$$
\cdots\cdots
$$

$$
\frac{y^{(n)}-y}{x^{(n)}-x} = \left(\frac{b}{a}\right)^{n-1}\;\frac{y'-y}{x'-x}\,.
$$

*Soit, pour fixer les idées, $b > a$.* On voit que $\frac{y^{(n)}-y}{x^{(n)}-x}$ *croit indéfiniment quand $x_n$ tend vers $x$.*

Cela suffit pour prouver que la fonction $y$ n'a pas de dérivée pour cette valeur de $x$; car si elle en avait une le rapport $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ devrait tendre vers une limite finie quand $\Delta x$ tend vers zéro d'une manière quelconque.

Il est d'ailleurs facile de compléter le résultat précédent, en montrant que $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ croît indéfiniment quand $\Delta x$ tend vers zéro par valeurs *positives quelconques*.

D'autre part quand $\Delta x$ tend vers zéro par valeurs *négatives*, le rapport $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ *tend vers zéro*.

Car si l'on considère les intervalles successifs dont $x$ est l'extrémité supérieure, soient $x_2'$, $x_1''$, $x_1'''$,... leurs extrémités inférieures, on trouvera facilement

$$\frac{y - y_1^{(n)}}{x - x_1^{(n)}} = \left(\frac{1 - b}{1 - a}\right)^{n-1} \frac{y - y_1'}{x - x_1'} .$$

Or l'hypothèse $b > a$ entraîne $1 - b < 1 - a$.

Donc cette expression tend vers zéro.

Une question qui se pose maintenant est de savoir si les propriétés précédentes subsistent quand $x$ n'appartient pas à l'ensemble E. Cela n'est pas.

Dans ce cas la variation de $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ est plus compliquée et dépend en général de la façon dont $\Delta x$ tend vers zéro. Nous réservons cette étude pour une autre occasion.

E. Cahen (Paris).

---

# DÉMONSTRATION SYNTHÉTIQUE DE DEUX THÉORÈMES DE CARNOY

---

La mort récente de Joseph Carnoy, professeur de géométrie à l'Université de Louvain, me fait songer à publier une démonstration synthétique de deux théorèmes qui lui sont dus ; si je le fais, c'est bien moins pour cette démonstration