DÉMONSTRATION SYNTHÉTIQUE DE DEUX THÉORÈMES DE CARNOY

Autor(en): **Alliaume, M.**

Objekttyp: **Article**

Zeitschrift: **L'Enseignement Mathématique**

Band (Jahr): **8 (1906)**

Heft 1: **L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE**

PDF erstellt am: **09.08.2024**

Persistenter Link: https://doi.org/10.5169/seals-9276

rivée pour cette valeur de x; car si elle en avait une le rapport $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ devrait tendre vers une limite finie quand Δx tend vers zéro d'une manière quelconque.

Il est d'ailleurs facile de compléter le résultat précédent, en montrant que $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ croît indéfiniment quand Δx tend vers zéro par valeurs *positives quelconques*.

D'autre part quand Δx tend vers zéro par valeurs *négatives*, le rapport $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ *tend vers zéro*.

Car si l'on considère les intervalles successifs dont x est l'extrémité supérieure, soient x_2', x_1'', x_1''',... leurs extrémités inférieures, on trouvera facilement

$$\frac{y - y_1^{(n)}}{x - x_1^{(n)}} = \left(\frac{1-b}{1-a}\right)^{n-1} \frac{y - y_1'}{x - x_1'} .$$

Or l'hypothèse $b > a$ entraîne $1 - b < 1 - a$.

Donc cette expression tend vers zéro.

Une question qui se pose maintenant est de savoir si les propriétés précédentes subsistent quand x n'appartient pas à l'ensemble E. Cela n'est pas.

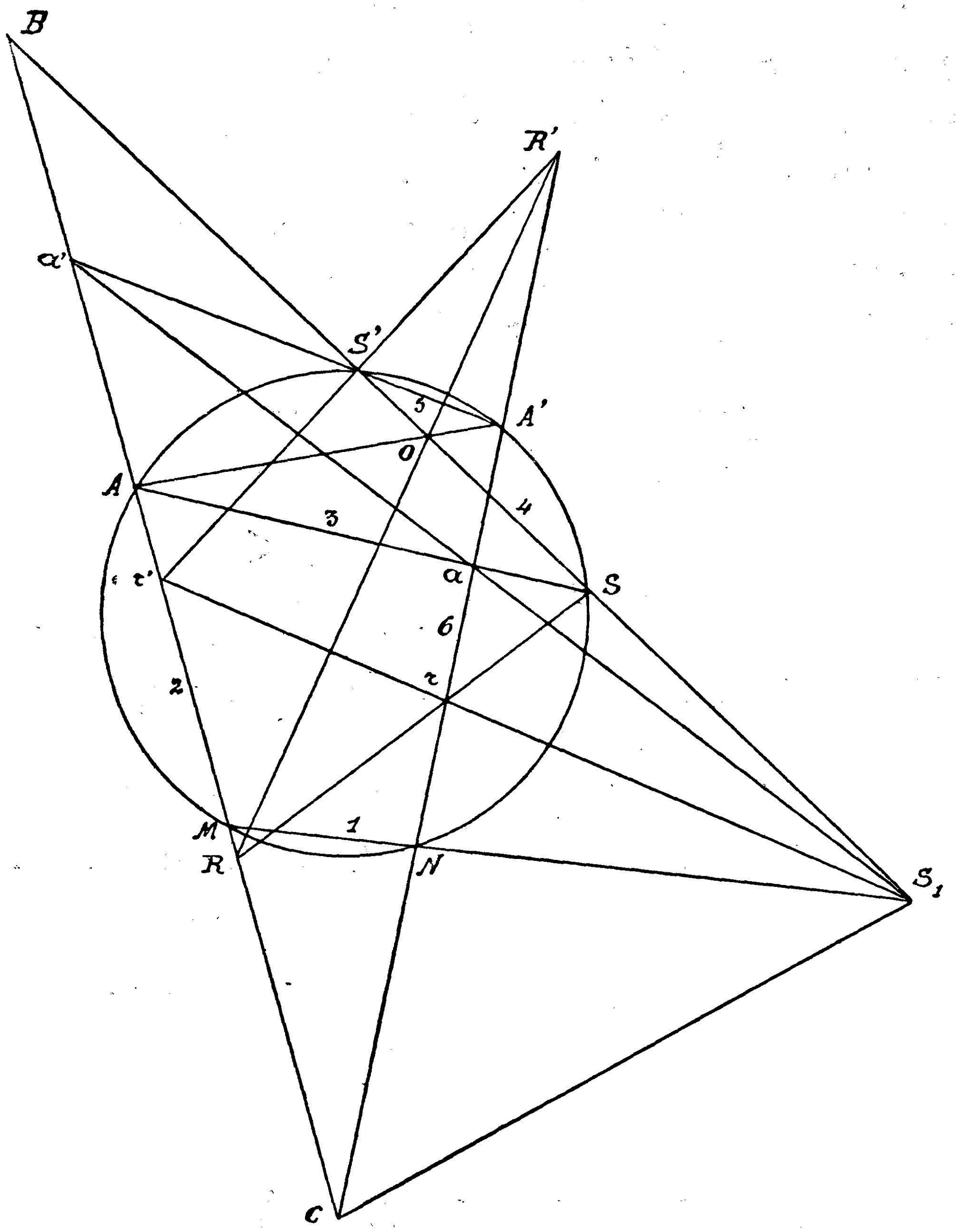
Dans ce cas la variation de $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ est plus compliquée et dépend en général de la façon dont Δx tend vers zéro. Nous réservons cette étude pour une autre occasion.

E. Cahen (Paris).

DÉMONSTRATION SYNTHÉTIQUE DE DEUX THÉORÈMES DE CARNOY

La mort récente de Joseph Carnoy, professeur de géométrie à l'Université de Louvain, me fait songer à publier une démonstration synthétique de deux théorèmes qui lui sont dus ; si je le fais, c'est bien moins pour cette démonstration synthétique que pour les théorèmes eux-mêmes, fort élégants et susceptibles de nombreuses applications à la construction des coniques.

I. — Soit (fig. 1) une conique avec trois sécantes la cou-



pant aux points A et M, A′ et N, S et S′. Considérons les deux premières comme deux ponctuelles projectives ; pour en déterminer la projectivité, posons a priori A homologue de A′, B, intersection de A M et S S′, homologue de B′, intersection de A′ N et S S′, et enfin C, intersection de A M et A′ N correspondant à lui-même. Les deux ponctuelles sont donc aussi perspectives et les rayons joignant leurs points homologues se coupent tous au point O, intersection de AA' et BB'.

Mais, pour préciser cette correspondance, il nous faut chercher une loi qui donne les trois couples homologues qui viennent d'être posés. Je dis que cette loi consiste en ceci : mener par S_1 intersection de $S\,S'$ et de MN, un rayon quelconque coupant $A\,M$ et $A'\,N$ respectivement aux points r' et r; joindre $S\,r$ et $S'\,r'$ et obtenir R intersection de $S\,r$ avec $A\,M$, homologue de R', intersection de $S'\,r'$ avec $A'\,N$. En faisant coïncider le rayon quelconque $S_1\,r\,r'$ avec $S\,S'$ on obtient les points B et B' ; en le faisant coïncider avec $S_1\,C$, on obtient l'élément uni C ; il reste à démontrer que, d'après cette loi, A correspond à A'.

Joignons $A\,S$ et marquons a l'intersection de $A\,S$ avec $A'\,N$; joignons $S_1\,a$ et marquons a' l'intersection de $S_1\,a$ avec $A\,M$; tout revient à démontrer que $A'\,a'$ passe par S'. Nous voyons que la figure contient un hexagone, $N\,M\,A\,S\,S'\,A'\,N$, inscrit dans la conique ; numérotons en les côtés en commençant par $N\,M = 1$. D'après le théorème de Pascal, a', intersection de 2 et 5, doit être en ligne droite avec les deux autres intersections a et S_1 ce qui achève la démonstration. Si maintenant nous considérons le quadrilatère $A\,A'\,M\,N$ et la position du centre de perspectivité O des deux ponctuelles, nous aurons le théorème suivant :

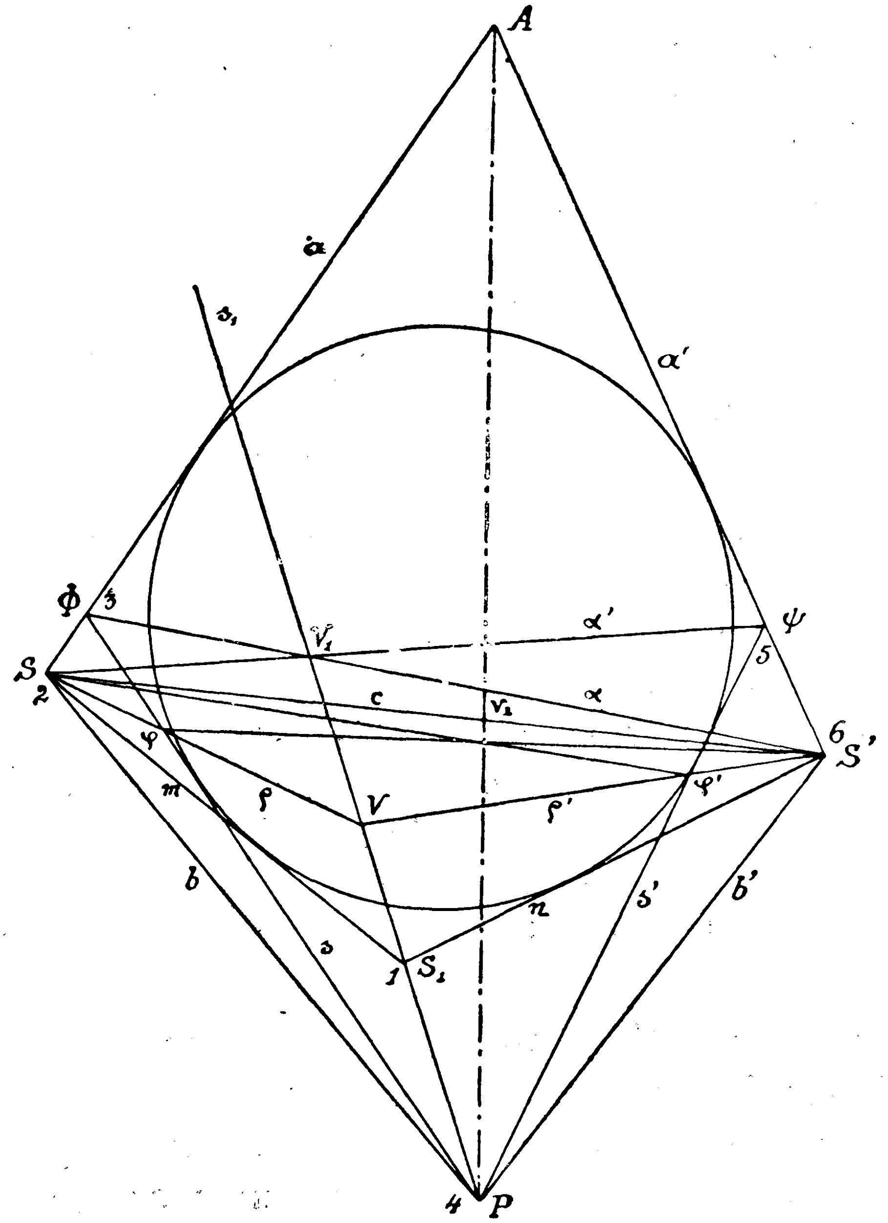
Etant donnés six points[1] d'une conique, on en prend quatre[2] pour les sommets d'un quadrilatère et on détermine les points[3] où la corde[4] des points restants rencontre deux côtés opposés[5]; les droites[6] menées par deux points[7] pris sur les autres côtés[8] en ligne droite avec l'un d'eux[9] et par les extrémités[10] de la corde[11], rencontrent ces mêmes côtés[12] en deux points[13] en ligne droite avec l'autre[14]. (CARNOY. *Annales de la Société scientifique de Bruxelles,* 1879-80 ; *Cours de géométrie analytique,* tome I.)

Ou bien : *Etant donnés cinq points d'une conique, on en prend quatre pour les sommets d'un quadrilatère et l'on*

---

[1] $A\,A'\,M\,N\,S\,S'$; [2] $A\,A'\,M\,N$; [3] S_1 et O ; [4] $S\,S'$; [5] $M\,N$ et $A\,A'$; [6] $r'\,S'$ et $r\,S$; [7] r' et r ; [8] $M\,A$ et $N\,A'$; [9] S_1 ; [10] S' et S ; [11] $S\,S'$; [12] $N\,A'$ et $M\,A$; [13] R' et R ; [14] O.

mène par le cinquième deux droites quelconques, la première rencontrant deux côtés opposés en deux points, la seconde rencontrant les autres côtés aussi en deux points : les droites qui joignent ces points combinés deux à deux forment avec chaque groupe de côtés opposés deux quadrilatè-



res tels que leurs diagonales se rencontrent sur la conique. (Carnoy, *loc. cit.*)

II. — Soit (fig. 2) une conique avec six tangentes a, m, a', n, s, s' dont quatre sont considérées deux par deux, a et m, a' et n, comme faisant partie de deux faisceaux projectifs de centres S et S'. Posons à priori a homologue de a', b, joignant S à P, intersection de s et s', homologue de b', joignant S' à

P, et enfin S S′ ou c élément uni des deux faisceaux; ceux-ci sont donc perspectifs, avec P A, où A est le point de rencontre de a et a', comme ponctuelle d'intersection.

Pour fixer cette perspectivité, il faut trouver une loi générale qui réponde aux trois exemples posés. Je dis qu'elle consiste en ceci: l'intersection de m et de n donne un point S_1 qui joint à P donne la droite s_1 ; prenons un point variable V sur s_1 et joignons $SV = \rho$ et $S'V = \rho'$; ρ coupe s en φ et ρ' coupe s' en φ' ; les rayons r et r' unissant respectivement S à φ' et S′ à φ seront homologues et se couperont en un point R de P A. Pour qu'il en soit ainsi, il faut que cette loi donne les couples $(a\,a')$, $(b\,b')$, $(c\,c')$. La vérification en est aisée pour $(c\,c')$: il suffit de prendre V en V_2, intersection de c avec P A ; de même pour (bb') en faisant venir V en P. Il reste à démontrer que a est, d'après cette loi, l'homologue de a'.

Cherchons Φ, intersection de s et de a ; joignons $\Phi S' = \alpha$ et marquons V_1 l'intersection de $\Phi S'$ avec s_1 ; on voit facilement que, pour que la proposition soit exacte, les droites $SV_1 = \alpha'$, a' et s' doivent se couper en un même point Ψ.

Considérons l'hexagone $n\,m\,a\,s\,s'\,a'\,n$ circonscrit à la conique. D'après le théorème de Brianchon, en numérotant les sommets ($n\,m = 1$, etc.) les droites 14, 25, 36 doivent se couper en un même point; comme, par construction, ceci se vérifie en V_1, il faut bien que α' passe par Ψ et il est clair maintenant que a est l'homologue de a'. Enfin, si nous considérons le quadrilatère $m\,n\,a\,a'$ et la position de la ponctuelle d'intersection des deux faisceaux perspectifs, nous avons le théorème suivant:

Etant données six tangentes [1] à une conique, on en prend quatre [2] pour former un quadrilatère et par deux sommets opposés [3] on tire deux droites [4] passant par le point d'intersection [5] des deux autres [6] ; si on mène par les autres sommets [7] deux droites [8] qui se coupent sur l'une d'elles [9], les lignes [10] qui joignent ces mêmes sommets [11] aux points [12] où ces droites [13] rencontrent les deux tangentes [14], se couperont sur l'autre [15]. (Carnoy, *loc. cit.*)

---

[1] $m\,n\,a\,a'\,s\,s'$; [2] $m\,n\,a\,a'$; [3] A et S_1 ; [4] P A et s_1 ; [5] P ; [6] s et s' ; [7] S et S′ ; [8] ρ et ρ' ; [9] s_1 en V ; [10] r et r' ; [11] S et S′ ; [12] ρ' et ρ' ; [13] ρ' et ρ ; [14] s' et s ; [15] P A.

Ou bien : *Etant données cinq tangentes d'une conique, on en prend quatre pour former un quadrilatère, et on choisit à volonté deux points sur la cinquième tangente ; on joint le premier à deux sommets opposés et le second aux deux autres sommets des quadrilataires ; deux points d'intersection des droites ainsi obtenues et combinées deux à deux formeront avec chaque groupe des sommets opposés, deux quadrilatères tels que les droites réunissant les points de concours des côtés opposés de l'un avec les points analogues de l'autre seront des tangentes à la conique.* (CARNOY, *loc. cit.*)

M. ALLIAUME.

SUR LA GÉOMÉTROGRAPHIE DES COURBES PLANES

---

1. — La méthode que nous avons donnée [1] ne s'applique pas, comme nous l'avons du reste fait remarquer, aux curvigraphes sans glissement.

Nous nous proposons de combler cette lacune par l'emploi de plusieurs symboles cinématiques nouveaux.

Pour exprimer que deux droites tournent autour d'un point fixe sur chacune d'elles mais mobile par rapport à leur plan, nous utiliserons le symbole K_1.

Si l'une des droites et par conséquent le point sont fixes par rapport au plan des deux droites, le symbole deviendra K_2.

Le symbole de deux droites tournant autour d'un point fixe sera, on le voit aisément, égal à 2 K_2.

Un curvigraphe quelconque aura donc un symbole de la forme

$$(d_1 \mathrm{D}_1 + k_1 \mathrm{K}_1 + k_2 \mathrm{K}_2) ;$$

coefficient de simplicité : $d_1 + k_1 + k_2$.

---

[1] Application des méthodes géométrographiques au tracé mécanique des courbes planes. *L'Enseignement mathématique*, mars 1906, p. 143.