

Zeitschrift: L'Enseignement Mathématique
Band: 8 (1906)
Heft: 1: L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE

Artikel: LA MATHÉMATIQUE PURE ET L'APPROXIMATION
Autor: Kollros, L.
DOI: <https://doi.org/10.5169/seals-9280>

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. [Siehe Rechtliche Hinweise.](#)

Conditions d'utilisation

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. [Voir Informations légales.](#)

Terms of use

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. [See Legal notice.](#)

Download PDF: 23.11.2024

ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, <https://www.e-periodica.ch>

découverte du calcul des fonctions et du calcul infinitésimal. Mais cela eût dépassé notre but, et nous nous contenterons de rappeler, en nous y associant, l'une des épigraphes placées en tête de la *Mirifici Descriptio* :

« Hic liber est minimus, si spectes verba ; sed usum
 Si spectes, Lector, maximus hic liber est.
 Disce ; scies parvo tantum debere libello
 Te, quantum magnis mille voluminibus. *Andreas Junius.* »

A. AUBRY (Beaugency, Loiret).

LA MATHÉMATIQUE PURE ET L'APPROXIMATION

1. — Dans l'évolution actuelle de l'enseignement des sciences, on constate un mouvement bien marqué vers l'utilité. Trop longtemps on a dit que le seul but des mathématiques était de former le raisonnement ; on les a enseignées comme s'il ne s'agissait que de créer de futurs mathématiciens. Aujourd'hui, on veut faire voir aux élèves que les sciences exactes ont de nombreuses applications pratiques, que la mathématique pure n'est pas seulement une excellente gymnastique de l'esprit, un admirable modèle de pensée logique, mais encore une interprétation approchée et commode de la réalité. Il n'est guère besoin de rappeler ici les nombreux écrits de M. KLEIN¹ en Allemagne, de M. PERRY¹ en Angleterre et de beaucoup d'autres auteurs². Signalons toutefois, parmi les ouvrages français, les volumes très suggestifs de M. LAISANT, *La Mathématique ; Philosophie-En-*

¹ Voir l'aperçu qu'en donne M. Marotte dans sa note sur *L'évolution actuelle de l'enseignement mathématique en Angleterre et en Allemagne*, publiée dans le *Bull. des sciences math.* de 1905, p. 281-306.

² Consulter les divers volumes de *L'Enseignement Mathématique*.

*seignement*¹ et *l'Initiation mathématique*²; puis les *Conférences du Musée pédagogique*³ et enfin les *Instructions* qui accompagnent les nouveaux programmes français du 27 juillet 1905⁴.

Ce mouvement vers la réalité est bien légitime et nous cherchons le moyen de suivre le courant sans faire subir d'oscillations trop brusques à nos méthodes habituelles.

Devons-nous nous contenter de vérifier les formules trigonométriques à l'aide de tables, comme le conseille M. Perry; voulons-nous, avec M. Borel, créer des laboratoires de mathématiques, des ateliers de menuiserie où les élèves construiraient au tour des surfaces de révolution, tandis que d'autres ouvriraient et refermeraient des robinets pour résoudre pratiquement les problèmes classiques sur les bassins à remplir et à vider? Il faudrait tenter l'expérience pour pouvoir en juger sagement. Sans exagérer l'importance de ces exercices pratiques, nous devons reconnaître qu'ils sont excellents pour *préparer* l'enseignement théorique des mathématiques et pour donner une idée des limites d'exactitude des mesures réelles. Mais il est inutile d'en abuser. Nous ne voulons pas sacrifier la haute valeur éducative du raisonnement mathématique; une bonne et solide logique doit en faire le fond.

Nous croyons qu'il est nécessaire de donner un caractère expérimental au début de notre enseignement, mais nous pensons aussi qu'à un certain moment il faut grouper les résultats observés, reconnaître leurs liens mutuels et arriver enfin à montrer comment on peut les déduire tous d'un minimum d'entre eux.

La manière naturelle de rapprocher la mathématique pure de la réalité, c'est de partir du concret pour arriver à l'abstraction quand on en sent le besoin, puis de retourner du

¹ Paris, Gauthier-Villars, 1^{re} édition 1898, (2^e édition, sous presse. *Réd.*).

² Paris, Hachette; Genève, Georg & C^{ie}, 1906.

³ *L'enseignement des sciences mathématiques et des sciences physiques* par H. Poincaré, G. Lippmann, L. Poincaré, P. Langevin, E. Borel, F. Marotte. Paris. 1904.

L'enseignement des sciences mathématiques et physiques dans l'Enseignement secondaire des garçons en Allemagne par F. Marotte, Paris, 1905.

⁴ Reproduites par *l'Enseignement Mathématique* du 15 Novembre 1905, p. 491-497.

symbole à la réalité en appliquant les résultats généraux trouvés en théorie à de nombreux exemples pratiques.

2. — Je précise mon idée :

En *Géométrie*, par exemple, la première initiation doit se faire à l'école primaire par des exercices de dessin ; il est bon d'apprendre aux élèves à se servir de la règle, de l'équerre et du compas pour construire quelques figures simples ; on peut leur faire constater expérimentalement toute une série de vérités qu'ils démontreront plus tard ; il est facile aussi de rendre plausibles les formules donnant la plupart des aires et des volumes usuels ; on en fera de nombreuses applications, en montrant que les figures en question se rencontrent en très grand nombre dans les objets qui nous environnent.

Les élèves ne trouvent en général aucune difficulté à ce genre d'exercices. — D'où vient que quelques-uns ont tant de peine plus tard à s'habituer à un raisonnement rigoureux ? C'est que le plus souvent ils n'ont pas compris l'utilité et la nécessité d'une telle rigueur.

Un docteur en philologie me disait un jour qu'il reproche au mathématicien de vouloir démontrer des choses évidentes ; par exemple que les côtés opposés d'un parallélogramme ou d'un rectangle sont égaux. Plusieurs de nos élèves ont peut-être fait la même réflexion, et s'ils l'ont faite c'est bien un peu notre faute.

Pour étudier les propriétés du parallélogramme on ne commencera pas par le définir, mais par le dessiner en coupant les lignes parallèles d'un cahier par deux autres parallèles (obtenues par exemple en faisant glisser une équerre sur une règle). Puis on pourra faire mesurer les côtés et les angles, constater qu'ils sont égaux deux à deux, tracer les diagonales, vérifier qu'elles se coupent mutuellement en parties égales, etc. — On observera ensuite que toutes les propriétés trouvées sont des conséquences de la première d'entre elles, celle qui a servi à construire la figure. On peut donc se demander si, en admettant cette première propriété (qui sera la *définition* du parallélogramme), on ne pourrait pas prouver toutes les autres sans instrument, mais par la pensée seule.

Nous substituons ainsi à l'incohérence du procédé expéri-

mental un enchaînement de vérités, — à une mesure grossière, un passage rigoureux d'hypothèse à conclusion, en faisant remarquer la portée de chaque partie de l'hypothèse. Si l'élève a compris que les fragments épars qu'il possédait font partie d'un tout, s'il est bien pénétré de la suite d'idées, s'il reconnaît la nécessité de prouver certaines propositions admises auparavant sans démonstration, il s'intéressera à la géométrie ; il aura compris la différence entre une vérification expérimentale et une preuve logique ; il aura franchi une première étape très importante. Mais il y a mieux à faire encore.

Il faudra qu'il reconnaisse en outre que l'expérience peut être trompeuse. — On lui fera dessiner, par exemple, un triangle dont les trois côtés diffèrent très peu et il croira que les médianes et les bissectrices correspondantes se confondent. — On trouverait facilement d'autres exemples ; je rappelle en particulier le paradoxe souvent cité¹ : $64 = 65$. On partage un carré de 64 cases en 2 triangles et 2 trapèzes que l'on peut assembler ensuite en un rectangle de 65 cases. Si l'on prend un carré de 441 cases, l'assemblage rectangulaire semble être parfait et l'expérience montre que $441 = 442$.

L'élève sait maintenant en quoi son bon sens est insuffisant ; il constate que la théorie a mis de la cohésion, de l'ordre, de la clarté et surtout de la *précision* dans les connaissances vagues qu'il possédait auparavant.

Il n'y aurait plus maintenant qu'un seul point à élucider ; et cependant, il est bon de s'arrêter un instant et de laisser à nos jeunes géomètres l'illusion d'avoir atteint la certitude absolue ; ils croiront que les vérités mathématiques s'imposent à nous et à la nature elle-même. — Il serait dangereux de les rendre sceptiques, de faire sombrer leur enthousiasme naissant ; donnons-leur plutôt l'occasion d'exercer souvent la faculté nouvelle qu'ils viennent d'acquérir en leur proposant une série de problèmes bien gradués. Il est bon de choisir des exemples que l'on peut résoudre soit par une construction géométrique, soit par un calcul numérique, un des

¹ Voir *Initiation mathématique*, par C.-A. Laisant. Paris, Genève, 1906.

procédés vérifiant l'autre. Cependant les problèmes de construction proprement dits sont particulièrement attrayants quand ils sont traités avec méthode. Nous possédons un modèle du genre, traduit en plusieurs langues : ce sont les *Méthodes et théories*, de PETERSEN ; cet excellent ouvrage est de plus une bonne préparation à l'étude de la géométrie moderne, l'auteur montrant l'importance de la transformation des figures.

3. — Je n'ai parlé que de Géométrie jusqu'ici, et encore n'ai-je rien dit de bien nouveau, puisqu'il est d'usage d'appliquer une méthode analogue à l'enseignement de l'Arithmétique. L'initiation expérimentale, le mécanisme du calcul se fait à l'école primaire. On commence l'étude des fractions par le gâteau à partager et l'on a raison ; on effectue les opérations fondamentales sans les justifier ; on enseigne les caractères de divisibilité sans les démontrer ; on a une idée de la numération sans en comprendre le principe ; on ne connaît que le nombre positif (entier et fractionnaire). — C'est à l'école secondaire, au Gymnase, que l'on comblera ces lacunes et que l'on insistera sur les extensions successives de l'idée de nombre ¹.

En parlant de la soustraction, on introduira tout naturellement le nombre négatif pour rendre l'opération toujours possible ; on remarquera que cette nouvelle notion est utile pour mesurer les grandeurs susceptibles d'être comptées dans deux sens différents, recettes et dépenses, températures, distances, etc.

Il est intéressant d'identifier les deux notions de « nombre » et de « longueur d'un vecteur », en représentant les nombres positifs et négatifs sur un axe, à partir d'une origine.

A l'ensemble des nombres entiers correspond ainsi un ensemble de points équidistants, ou aussi de segments dirigés, de vecteurs. — Remarquons qu'on ne sort pas de cet ensemble de points en appliquant à leurs abscisses les trois premières opérations fondamentales.

¹ Voir, à ce sujet, la note de M. FEHR sur *les extensions de la notion des nombres dans leur développement logique et historique*. L'Enseign. math., 4^e année, p. 16-27.

La division introduit les nombres fractionnaires ; les points correspondants viendront remplir les intervalles de la figure précédente. On arrive ainsi à l'ensemble des nombres rationnels et on reste dans cet ensemble si l'on applique à ses éléments les quatre opérations fondamentales.

Le rapport de deux segments s'écrira de préférence $\frac{AM}{BM}$ (plutôt que $\frac{AM}{BM}$ ou $\frac{MA}{BM}$) ; on constatera qu'il est susceptible de prendre toutes les valeurs de $-\infty$ à $+\infty$ et que l'on peut déterminer la position d'un point sur une droite par le rapport de ses distances à deux points fixes de cette droite.

On peut éventuellement compléter ces notions de Géométrie analytique à une dimension en parlant de la division harmonique et du rapport anharmonique ; en montrant la signification de quelques substitutions simples ;

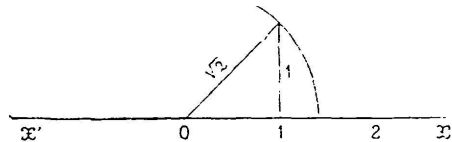
par exemple : $y = x + a$ (translation, glissement de l'axe sur lui-même ou changement d'origine),

$y = ax$ (amplification ou changement d'unité),

$y = -x$ (symétrie par rapport à l'origine),

ou encore $y = \frac{1}{x}$ et plus généralement $y = \frac{ax + b}{cx + d}$.

La théorie de la racine carrée exige une nouvelle extension de la notion de nombre. Au point de vue pratique, les nombres rationnels suffisent évidemment à la mesure des grandeurs. Et cependant, si l'on n'en introduit pas d'autres, on se voit obligé de dire que l'arc de cercle de la figure ci-dessous ne passe par aucun des points de l'axe Ox , donc ne le coupe pas ; or, nous ne pouvons imaginer qu'une longueur (0 — 2 p. ex.)



soit parcourue par un point d'un bout à l'autre sans que le nombre correspondant passe par toutes les valeurs comprises entre les extrémités (0 et 2). L'élève a cette intuition de la continuité. On dira donc que $\sqrt{2}$ et tous les autres nombres irrationnels possèdent dans le domaine de la pensée une existence aussi réelle que les nombres rationnels. Remarquons en outre que l'introduction d'un nouveau symbole tel que $\sqrt{2}$ est très commode puisqu'il condense en un signe, l'infinité des solutions rationnelles approchées.

4. — Et maintenant j'arrive à la dernière étape que nos jeunes géomètres avaient encore à franchir pour arriver à une compréhension exacte de la mathématique pure. S'ils ont bien saisi la notion de nombre irrationnel, ils sauront aussi ce qu'on entend par « point géométrique » ; ils comprendront que c'est une limite, un symbole, une abstraction, et qu'il en est de même de la droite, du plan et de toutes les figures géométriques. — Mais alors ils feront immédiatement cette objection : Les résultats mathématiques ne sont pas conformes à la réalité puisqu'ils portent sur d'autres objets que ceux du monde sensible ! En effet, en créant les symboles subtils de la mathématique pure, on perd en objectivité ce que l'on gagne en rigueur ; mais, il faut reconnaître combien ces abstractions sont commodes. Les figures imparfaitement délimitées par nos sens ou par des instruments ne sont pas même soumises à l'axiome : « Deux quantités égales à une troisième sont égales entre elles », car, si l'on se donne trois objets presque identiques, il peut très bien se faire qu'on ne discerne pas le premier du second, ni le second du troisième, mais que l'on remarque une différence entre le premier et le troisième. Au lieu de dire que deux points déterminent d'autant mieux une droite qu'ils sont plus éloignés (en restant dans les limites du dessin), ou bien que le point d'intersection de deux droites est fixé plus exactement si elles se coupent à angle droit que si elles se rencontrent sous un angle très aigu, — on admet que « par deux points passe toujours une droite et une seule » ; que « deux droites se coupent toujours en un point et un seul ». — C'est plus simple, plus net et cela rend le raisonnement beaucoup plus facile et plus clair : on peut même affirmer que sans ces abstractions, la science serait impossible.

En outre, si les grandeurs sur lesquelles on raisonne ne sont que des conventions, elles ne sont cependant pas arbitraires puisqu'elles ont été pour ainsi dire préparées, dictées par l'expérience ; si elles ne sont pas la traduction exacte des faits, elles n'en diffèrent pourtant que très peu. Un résultat théorique indique toujours une approximation d'autant plus précieuse que l'on en connaîtra plus exactement les limites.

Donc, un complément indispensable à toute théorie mathématique ayant pour but des applications pratiques est une évaluation des erreurs, une théorie des approximations. Sans doute, on ne peut guère exposer à l'école une théorie systématique des erreurs ; mais on doit du moins initier l'élève aux procédés les plus simples de calcul approché par quelques exercices convenablement choisis.

On commencera, par exemple, par faire évaluer la surface d'un carré dont le côté est donné avec une certaine approximation : dire que le côté mesure $6,^{cm}4$, au mm. près, c'est dire qu'il est compris entre $6,^{cm}35$ et $6,^{cm}45$; la surface du carré est alors comprise entre $40,^{cm^2}3225$ et $41,^{cm^2}6025$; on prendra donc comme valeur approchée 41^{cm^2} ; il serait tout à fait illusoire de conserver d'autres chiffres.

Inversement, si l'on veut avoir des résultats suffisamment approchés, on peut se demander quel degré d'approximation il faut avoir dans les données.

Il est intéressant de faire appel à l'expérience aussi souvent que possible. On peut, par exemple, mesurer directement une circonférence, puis calculer sa longueur en prenant successivement $\pi = 3,14$; $\pi = \frac{22}{7}$; $\pi = 3,1416$; on comparera les résultats et l'on recherchera aussi l'influence d'une petite erreur dans la mesure du diamètre.

Je n'insiste pas sur ces exercices, on en trouvera plusieurs dans les recueils de MARTUS (*Mathematische Aufgaben*), de SCHÜLKE (*Aufgabensammlung*) et dans les *Leçons d'Arithmétique* de M. Jules TANNERY où l'on montre sur quelques exemples la façon d'opérer pour arriver à l'approximation voulue avec le minimum d'effort.

Dans les classes supérieures, on pourra parler aussi de l'interpolation et des méthodes approchées pour l'évaluation des surfaces (méthodes des trapèzes de Poncelet, de Simpson ; comparaison avec les données d'appareils enregistreurs, planimètres, intégraphes).

5. — La question des approximations mériterait évidemment une étude plus approfondie, mais il est temps de conclure.

A cet effet je formulerai les *deux thèses* suivantes :

1. — *Il est bon de faire précéder toute définition, toute théorie d'une image grossière donnant une idée générale du sujet, — puis d'amener peu à peu l'élève à la définition logique, à la notion précise sur laquelle on pourra fonder un raisonnement.*

2. — *Il est utile de voir dans quelles limites se meut le résultat du raisonnement mathématique quand les données varient entre certaines limites connues. Aussi souvent que possible on comparera le résultat des calculs avec le résultat donné par une mesure directe.*

Dans la première de ces thèses, j'insiste sur la période d'initiation, puis sur le passage d'une intuition vague à une logique serrée. Dans la seconde, au contraire, je recommande de retourner de l'abstrait au concret en appuyant sur les limites imposées à la raison par l'expérience.

La période préparatoire surtout doit nous intéresser. J'ai déjà parlé de l'introduction à la Géométrie ; je cite encore à ce sujet les ouvrages de MM. Emile BOREL¹, Carlo BOURLET² et A. GRÉVY³, où les considérations de symétrie, de translation et de rotation facilitent les démonstrations.

En *Algèbre*, la représentation graphique des fonctions doit jouer le rôle principal ; un trait de courbe donne mieux l'idée de fonction continue à un débutant que le système d'inégalités de la définition logique ; plus tard, cependant, on pourra faire remarquer que cette définition correspond à une courbe idéale où les abscisses et les ordonnées seraient mesurées avec une précision infinie. Il y a ici le même passage que celui d'un dessin à l'idée subtile de figure géométrique. Une quantité d'autres notions peuvent être ainsi préparées par un petit croquis ; je rappellerai entre autres les fonctions *discontinues* ($\operatorname{tg} x$, $\operatorname{sec} x$), la différence entre les fonctions *uniformes* (x , x^2 , x^3 , $\sin x$) et *non uniformes* (le cercle $y = \pm\sqrt{1-x^2}$ a 2 branches ; $y = \operatorname{arc} \sin x$ en a une infinité) ; la *dérivée* en un point d'une courbe est la pente de la tangente en ce point. Un point anguleux représente une *discontinuité de la dérivée*. L'inté-

¹ Géométrie, premier et second cycles. Paris, Arm. Colin, 1905.

² Cours abrégé de Géométrie. Paris, Hachette, 1906.

³ Géométrie théorique et pratique. Paris, Vuibert & Nony, 1905.

grale doit être définie comme surface ; il serait tout à fait hors de propos de faire soupçonner à nos élèves qu'ils ne savent pas ce que c'est qu'une surface ; le *théorème de la moyenne* revient à remplacer une surface curviligne par un rectangle. Pour rendre plausibles les *théorèmes de Rolle et des accroissements finis*, il suffit de constater que, si l'on a une fonction uniforme dont la dérivée est continue, on peut toujours mener une tangente parallèle à une corde, etc.

Si l'on veut bien faire voir la différence entre deux *séries* dont l'une converge seulement dans un intervalle et l'autre partout, on peut faire dessiner, par exemple, les deux courbes :

$$y = \frac{1}{1-x} , \quad \text{et} \quad y = e^x ,$$

puis celles qui sont fournies par les premiers termes des développements en séries :

$y_1 = 1 + x ,$	$y_1 = 1 + x ,$
$y_2 = 1 + x + x^2 ,$	$y_2 = 1 + x + \frac{x^2}{2} ,$
$y_3 = 1 + x + x^2 + x^3 ,$	$y_3 = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} ,$
.....

On constatera que les premières ne se rapprochent de la courbe $y = \frac{1}{1-x}$ que dans l'intervalle de -1 à $+1$, tandis que les autres tendent vers la courbe $y = e^x$ tout entière.

En *Trigonométrie*, je crois qu'il est préférable de commencer par la résolution des triangles rectangles¹ ; au début, on pourra se servir avec avantage d'une table de valeurs naturelles des lignes trigonométriques ; les élèves peuvent eux-mêmes en établir une à 3 décimales à l'aide d'un dessin suffisamment grand sur papier millimétrique. Après l'avoir utilisée dans quelques exercices, ils reconnaîtront aisément en quoi les tables logarithmiques sont préférables. — La résolution des triangles rectangles, à elle seule, peut être illustrée de nombreuses applications intéressantes. — Ce n'est que plus

¹ C'est également ce que recommande M. FERR, dans son article sur *l'enseignement des éléments de Trigonométrie*. L'Enseign. math. 1^{re} année, 1899, p. 45-49.

tard que l'on parlera des angles supérieurs à deux droits, des angles négatifs, puis des propriétés des fonctions circulaires.

L'étude de la *Géométrie descriptive* est bien préparée par le dessin des projections de quelques solides simples sur deux plans perpendiculaires; souvent on peut trouver le développement de la surface du solide et reconstituer le modèle en carton. Avant d'aborder les méthodes générales, je fais déterminer à mes élèves les sections par des plans de bout de prismes et de pyramides reposant sur le plan horizontal; la section se rabat sans difficulté sur le plan de la base. On peut alors faire remarquer l'affinité ou l'homologie de la base du corps avec la projection horizontale de la section ou avec son rabattement. — Plus tard, l'élève retrouvera l'affinité ou l'homologie dans presque tous les chapitres de la géométrie descriptive. En Géométrie analytique, on pourra lui faire voir aussi que certaines substitutions linéaires représentent des transformations affines $x' = x$, $y' = ry$ ou homologiques: $x' = \frac{x}{x-1}$, $y' = \frac{y}{y-1}$ par exemple, (l'origine des coordonnées est le centre d'homologie, la droite $x = 2$ en est l'axe).

La *Mécanique* est avant tout une science expérimentale; il est difficile d'en donner un exposé bien cohérent dans une école moyenne. Nous devons nous contenter de la période préliminaire, en tenant compte autant que possible du développement historique. Doit-on commencer par la statique, par la cinématique ou encore par une étude géométrique des vecteurs? Je me borne à poser la question, en insistant cependant sur les avantages des méthodes modernes préconisées par Appell, Chappuis, Kœnigs, etc.

J'arrête ici ces remarques dont le seul but est d'attirer de nouveau l'attention sur ce que l'on peut faire en vue de rendre les mathématiques plus accessibles, plus attrayantes et plus pratiques sans rien enlever de leur haute valeur comme modèle de logique.

L. KOLLROS (Chaux-de-Fonds, Suisse).