De (4) et (5) résulte aussitôt

$$\frac{Q_i}{Q'_i} = \frac{Q_j}{Q'_j}, \qquad (i, j = 1, 2, \ldots l).$$

Ceci démontre la proposition que nous venons d'énoncer. Celle-ci, pour les mêmes raisons que tout à l'heure, est vraie quelle que soit la nature des éléments considérés.

Remarque. Dans le cas où les équations (1), au lieu d'être homogènes, admettent un second membre et sont de la forme

$$(6) \qquad a_{k,1}x_1 + a_{k,2}x_2 + \ldots + a_{k,n}x_n = d_k, \qquad (k = 1, 2, \ldots r)$$

leur solution la plus générale, s'il en existe une, est de la forme

$$x_j = b_{j,1}t_1 + b_{j,2}t_2 + \ldots + b_{j,s}t_s + \alpha_j, \qquad (j = 1, 2, \ldots n)$$

dans laquelle $\alpha_1, \alpha_2, \ldots \alpha_n$ représentent alors l'un quelconque des systèmes de valeurs vérifiant (6).

La démonstration est immédiate. Nous ne nous y arrêtons pas.

G. Dumas (Zurich).

CONSTRUCTION ET GÉNÉRATION DES COURBES

du $(n+1)^e$ degré et de la $(n+1)^e$ classe [1].

Nous commencerons par les définitions suivantes :

Groupe du $(n+1)^e$ degré.

Un faisceau dont chaque rayon correspond à n rayons d'un autre faisceau alors que chaque rayon de celui-ci correspond à un seul rayon du précédent, détermine avec le deuxième, un groupe du $(n+1)^e$ degré.

Groupe de la $(n+1)^e$ classe.

Etant donné deux divisions de points, telles que chaque point de la première correspond à n de la deuxième et chaque point de la deuxième à un seul de la première, ces divisions forment un groupe de la $(n+1)^e$ classe.

[1] Voir C. R. 1906 (n° 24, 11 juin et n° 1, 2 juillet).

Equations :

Les origines sont arbitraires.

α et β étant les abscisses des points des divisions ou les coefficients angulaires des angles des rayons des faisceaux, on a l'équation :

$$(1)\qquad \alpha(A\beta^n + B\beta^{n-1} + \dots + M\beta + N) + A'\beta^n + B'\beta^{n-1} + \dots + M'\beta + N' = 0 ,$$

ou

$$(2)\qquad \alpha F_1^n(\beta) + F_2^n(\beta) = 0 .$$

Il y a 2 $(n+1)$ ou $2n+2$ termes. Donc $(2n+1)$ paires de points homologues ou de rayons homologues permettent de déterminer les coefficients.

Théorème. *Le lieu des points de coupe des rayons homologues de deux faisceaux formant un groupe du* (n + *1*)^e^ *ordre est une courbe du* (n + *1*)^e^ *degré. Le sommet du premier faisceau est un point simple de la courbe et le sommet du second un point multiple d'ordre* n.

Soit S_1 (k, o) le premier sommet et S_2 (o, o) l'autre. Tout rayon du premier faisceau donne :

$y = \alpha\ (x - k)$ et ceux de l'autre : $y = \beta x$.

En éliminant α et β on obtient

$$\beta = \frac{y}{x}$$

$$\alpha = -\frac{F_2^n(\beta)}{F_1^n(\beta)} = -\frac{F_2^n(x, y)}{F_1^n(x, y)} ,$$

puis enfin

$$y = -\frac{F_2^n(x, y)}{F_1^n(x, y)}(x - k) ,$$

ou

$$yF_1^n(xy) + xF_2^n(x, y) - kF_2^n(x, y) = 0 .$$

Théorème. *L'enveloppe des droites joignant les points homologues de deux divisions de points formant un groupe du* (n + *1*)^e^ *ordre est une courbe de la* (n + *1*)^e^ *classe. La première base est une tangente simple et la seconde une tangente multiple d'ordre* n.

Désignons une des droites en question par :

$$x\mu + y\nu + 1 = 0 ,$$

avec

$$\mu = -\frac{1}{\alpha} \quad \text{et} \quad \nu = -\frac{1}{\beta} .$$

En faisant varier μ et ν et en introduisant leurs valeurs en fonctions de α et de β dans l'équation principale on trouvera l'équation de l'enveloppe. On a

$$-\frac{1}{\mu}\left\{\frac{A(-1)^n}{\nu^n} + \frac{B(-1)^{n-1}}{\nu^n} + \dots + \frac{M(-1)}{\nu} + N\right\} + \left\{A'\frac{(-1)^n}{\nu^n} + \dots + \frac{M'(-1)}{\nu} + N'\right\} = 0$$

Le terme de degré inférieur étant du n^e degré donc l'origine est un point multiple d'ordre n et le point (k, o) un point simple de la courbe. C. q. f. d.

COROLLAIRE. *Quand les faisceaux ont deux rayons homologues confondus la courbe se ramène à une courbe du* n^e *degré. Le sommet du deuxième faisceau est un point multiple d'ordre* (n — 1) *et celui du premier n'est plus sur la courbe. La droite formée par les rayons confondus s'est détachée de la courbe.*

Dans ce cas la ligne des sommets est confondue avec les rayons homologues considérés. En la prenant comme axe on aura la solution $\alpha = o$ qui entraine $\beta = o$ et par conséquent on aura aussi

$$N' = 0 .$$

L'équation du lieu sera :

ou

$$a + b\nu + c\nu^2 + \ldots + m\nu^{n-1} + n\nu^n$$
$$+ \mu \{ a' + b'\nu + \ldots +$$
$$m'\nu^{n-1} + n'\nu^n \} = 0 ,$$

ou encore :

$$\nu^n (n'\mu + n) + \nu^{n-1} (m'\mu + m) + \ldots$$
$$+ \nu^2 (c'\mu + c) + \nu (b'\mu + b)$$
$$+ a'\mu + a = 0 .$$

L'équation étant du $(n + 1)^e$ degré la courbe est de la $(n + 1)^e$ classe.

$$\nu = \infty \text{ donne } \mu = - \frac{n}{n'}, \text{ et}$$

$$\mu = \infty \text{ donne } n \text{ solutions en } \nu ,$$

donc la première base est une tangente simple et l'autre une tangente multiple d'ordre n.

COROLLAIRE. *Quand les deux divisions ont un point homologue commun la courbe se ramène à une courbe de la* n^e *classe. La première base se détache de l'enveloppe et n'est plus tangente tandis que la seconde est encore une tangente multiple d'ordre.* (n — 1)

En prenant le point commun comme origine on a : $\alpha = o$ qui entraîne $\beta = o$ et par la suite :

$$N' = 0 .$$

L'enveloppe prend alors la forme

$$\nu^n . n + \nu^{n-1} (m'\mu + m) + \ldots +$$
$$a'\mu + a = 0 .$$

Donc l'enveloppe est de la n^e classe.

$$yF_1^n(xy) + x(A'y^n + B'xy^{n-1} + \dots + M'x^{n-1}y) - k(A'y^n + B'xy^{n-1} + \dots + M'x^{n-1}y) = 0 .$$

ou

$$F_1^n(xy) + xF_3^{n-1}(xy) - kF_3^{n-1}(x, y) = 0 .$$

Le terme de degré inférieur est du $(n - 1)^e$.

L'origine est un point multiple d'ordre $n - 1$. D'autre part $y = o$ amène

$$x = \frac{M'}{M' + N} k .$$

Donc le point (k, o) n'est plus sur la courbe.

$\nu = \infty$ ne donne plus de solutions en μ autre que $\mu = \infty$, par conséquent la première base n'est plus une tangente ; par contre $\mu = \infty$ donne $(n - 1)$ solutions en ν différentes et différentes de $\nu = \infty$ ce qui prouve que la deuxième base est une tangente multiple d'ordre $(n - 1)$

Application des théories précédentes a la construction des courbes.

Les deux théorèmes précédents et leurs cas spéciaux permettent de construire par points et par tangentes les courbes du 3e degré à point double ou de la 3e classe à tangente double quand on connaît 5 paires d'éléments homologues dans les groupes générateurs.

Les cas spéciaux déterminent des coniques auxiliaires au moyen desquelles on peut trouver tous les éléments des groupes et par conséquent les courbes considérées.

Courbes du 3e degré.

Le groupe primitif du 3e degré sera formé par un faisceau S (a, b, c) et un un faisceau S_1 $(a_1, a_2, b_1, b_2, c_1)$ contenant les rayons homologues *nécessaires*.

Le rayon c détermine sur S_1 une division A_1, A_2, B_1, B_2, C_1 et le rayon C_1 sur S une division A B C; celles-ci ont le point CC_1 commun. Elles ont pour enveloppe une courbe de 2e degré

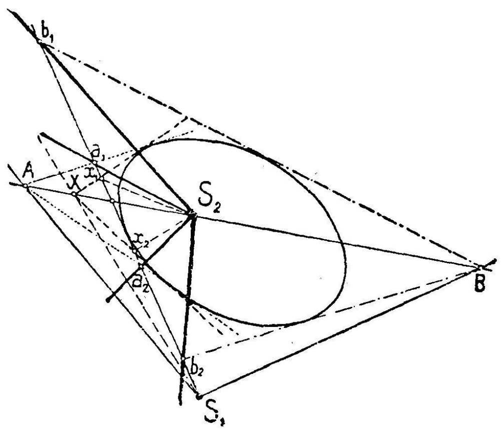
Courbes de la 3e classe.

Désignons par A, B, C des points de la 1re division et par A_1 A_2, B_1 B_2, C_1 les points homologues *nécessaires* de la 2e. Les tangentes sont avec les deux bases :

$$AA_1 , AA_2 , BB_1 , BB_2 , CC_1 .$$

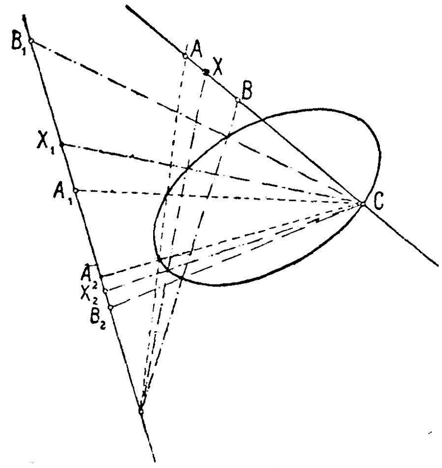
En considérant les points C et C_1 comme sommet de deux faisdéterminée par les tangentes AA_1, AA_2, BB_1, BB_2 et la base c de la division.

Par tout point X de c_1 on peut mener deux tangentes arbitraires à cette conique. Elle déterminent 2 points X_1 et X_2 sur c. Donc S X et $S_1 X_1$ puis $S_1 X_2$



sont des rayons homologues du groupe primitif et ils déterminent deux points nouveaux de la courbe. En laissant X décrire C_1 on forme l'ensemble des tangentes de la conique auxiliaire et l'ensemble des points de la courbe du 3e degré. (Voir fig. 1)

ceaux et en joignant C avec les points de la 2e base, C_1 avec ceux de la 1re base, on obtient un groupe du 3e degré dans lequel CC_1 représente 2 rayons homologues confondus. Ce groupe détermine une conique



que l'on construit par les cinq points 1, 2, 3, 4, 5 connus.

Tout rayon passant par C_1 et coupant la conique donne deux points que l'on joint à C et qui sont les rayons homologues du 2e faisceau. Les 3 rayons sont prolongés jusqu'aux bases et déterminent ainsi 2 nouvelles paires de points du groupe primitif de 3e classe et par conséquent deux nouvelles tangentes. Donc la courbe peut être construite par tangentes en menant par C des rayons arbitraires qui coupent la conique auxiliaire. (Voir fig. 2).

Remarque. Le 2e faisceau ou la 2e ponctuelle forme une involution du 2e degré, qui est homographique avec l'autre faisceau ou l'autre ponctuelle. La construction précédente donne une démonstration des théorèmes suivants très connus.

Quand le sommet d'un faisceau involutif est sur une conique, les sécantes déterminées

Quand une tangente d'une conique est considérée comme base d'une involution, les points *par chaque paire de rayons homologues sont concourantes.*

Courbes du (n + 1)^e *degré.*

1) Etant donné deux faisceaux S_n, S_1 formant un groupe du $(n+1)^e$ degré, celui-ci est déterminé par $(2n+1)$ paires de rayons homologues fournissant $(2n+1)$ points de la courbe en dehors du point multiple d'ordre n et du point simple considérés aux sommets des deux faisceaux.

2) Soient maintenant deux rayons homologues a et a' coupant les deux faisceaux a coupe S_1 et a' coupé S_n. Ceux-ci donnent deux divisions de points du $(n+1)^e$ degré avec un point homologue commun. Ces divisions entraînent une courbe auxiliaire de la n^e classe dans laquelle la base a' est tangente d'ordre $(n-1)$ tandis que a n'est pas tangente.

3) Si nous supposons cette courbe auxiliaire construite ; par tous les points de a' on peut lui mener une tangente mais une seule qui donne un point sur la division a, mais par contre par le point trouvé on peut mener $(n-1)$ tangentes, nouvelles qui donnent les $n-1$ autres points correspondant à celui-là, de telle sorte par les points ainsi considérés, on peut toujours mener les rayons homo-

de coupe de chaque paire de tangentes menées par deux points homologues sont sur une même ligne droite.

Courbes de la (n + 1)^e *classe.*

1) Etant donné deux divisions de points D_n et D_1, formant un groupe de la $(n+1)^e$ classe celle-ci est déterminée par $(2n+1)$ paires de points, c'est-à-dire par $(2n+1)$ tangentes en dehors de la tangente multiple d'ordre n et de la tangente simple considérées comme bases des divisions.

2) Si maintenant nous prenons deux points homologues A A′ et que nous joignons tous les points de D_n avec A′ et tous ceux de D_1 avec A nous formons deux faisceaux en A′ et A tels qu'à tout rayon de A′ en correspondent un de A et à tout rayon de A on en trouve n de A′. On a un groupe de la $(n+1)^e$ classe avec un rayon homologue commun ; la courbe correspondante est du n^e degré, le sommet A′ est un point multiple d'ordre $n-1$, l'autre est extérieur.

3) Si nous supposons cette courbe auxiliaire construite, à tout rayon arbitraire issu de A correspondent n points de coupe avec cette courbe, c'est-à-dire n rayons issus de A′ (réels ou imaginaires). Le rayon par A donne un point sur D_1 et les n rayons par A′ donnent les n points correspondants sur D_n. Ceux-ci déterminent n nouvelles tangentes de la courbe primitive de la $(n+1)^e$ classe. Par

logues correspondants, n en S_n et un en S_1. Ces rayons donnent des nouveaux points de la courbe du $(n+1)^e$ degré, et par conséquent, cette courbe peut être construite au moyen de la courbe auxiliaire correspondante de la n^e classe.

conséquent cette courbe peut être construite au moyen des points de la courbe inférieure du n^e degré.

Construction de la courbe auxiliaire.

Pour déterminer cette courbe de n^e classe qui correspond à un groupe de $(n+1)^e$ classe ayant une paire de points homologues confondus, nous remarquons que l'on a $2n$ tangentes différentes, une d'ordre $(n-1)$ et une droite non tangente.

Si maintenant, nous prenons une quelconque des $2n$ tangentes simples différentes, celle-ci est coupée par les $(2n-1)$ autres en $2n-1$ points. A chaque point de la tangente d'ordre $(n-1)$ correspond un seul point de cette tangente simple et à chaque point de celle-ci correspondent $(n-1)$ points homologues sur la tangente multiple, car, par chaque point de la tangente simple on peut mener $(n-1)$ autres tangentes simples.

Il en résulte donc que la construction de la courbe de la n^e classe se ramène à deux divisions formant un groupe de la n^e classe, donc telle qu'à tout point de l'une correspondent $(n-1)$ points de l'autre et à tout point de cette autre un seul de la première.

On peut également ramener cette courbe à celle résultant d'un groupe de n^e degré. Cette courbe comporte le point A′ comme point multiple d'ordre $(n-1)$ et en plus $2n+1-1$ ou $2n$ autres points simples.

En joignant un quelconque de ces points avec les $2n-1$ autres puis ceux-ci avec A′, on forme deux faisceaux, tels qu'à chaque rayon du premier en correspondent $n-1$ du 2[e] et chaque rayon du 2[e] un du premier; car tout rayon par le point simple en question a encore $(n-1)$ points de coupe possible avec la courbe.

Il en résulte également que la construction de cette courbe se ramène à celle résultant de deux faisceaux formant un groupe du n^e degré d'après les formules précédentes appliquées au nombre des points nécessaires.

Si dans la formule

$$2n+1$$

on fait $n = n - 1$, on trouve

$$2n - 1 ,$$

comme nombre des tangentes nécessaires en dehors de la tangente d'ordre $n - 1$ et d'une tangente simple.

CONCLUSIONS.

A. *Une courbe de* $(n+1)^e$ *degré* avec un point multiple d'ordre n se ramène à

Une courbe de n^e *classe* avec une tangente multiple d'ordre $(n-1)$, puis à

Une courbe de degré $(n-1)$ avec un point d'ordre $n-2$, puis à

Une courbe de $(n-2)^e$ *classe* avec une tangente d'ordre $n-1$, puis à

. . . .

. . . .

Une courbe du 3^e *degré* avec un point double ou de 3^e *classe* avec une tangente double, et enfin à

Une courbe du 2^e *degré ou de la* 2^e *classe avec 5 points ou 5 tangentes simples.*

B. *Il en résulte a priori le théorème suivant particulièrement connu dans les coniques.*

THÉORÈME. *Si un point multiple d'ordre* $(n-1)$ *d'une courbe du* n^e *degré est considéré comme sommet d'un faisceau involutif du* n^e *degré les points de coupe de* n *rayons homologes avec la courbe sont en ligne droite et les droites correspondant à chaque groupe de* n *rayons sont concourantes.*

A. *Une courbe de la* $(n+1)^e$ *classe* avec une tangente d'ordre n se ramène à

Une courbe du n^e *degré* avec un point d'ordre $n-1^e$ puis à

Une courbe de $(n-1)^e$ *classe* avec une tangente d'ordre $(n-2)$ puis à

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

Une courbe de 3^e *classe ou de* 3^e degré avec une tangente double ou un point double, et enfin à

Une courbe de 2^e *degré ou de* 2^e *classe avec 5 points simples ou 5 tangentes simples.*

B. Ceci donne le théorème dualistique suivant *dont le cas particulier des coniques est bien connu.*

THÉORÈME. *Si une tangente multiple d'ordre* $(n-1)$ *d'une courbe de* n^e *classe est considérée comme base d'une division involutive de* n^e *classe, les* n *tangentes issues de* n *points homologues sont concourantes, et les points de concours de chaque groupe sont en ligne droite.*

L. CRELIER, (Bienne-Berne).