

# BIBLIOGRAPHIE

Objektyp: **Group**

Zeitschrift: **L'Enseignement Mathématique**

Band (Jahr): **8 (1906)**

Heft 1: **L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE**

PDF erstellt am: **13.09.2024**

## **Nutzungsbedingungen**

Die ETH-Bibliothek ist Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Inhalten der Zeitschriften. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern.

Die auf der Plattform e-periodica veröffentlichten Dokumente stehen für nicht-kommerzielle Zwecke in Lehre und Forschung sowie für die private Nutzung frei zur Verfügung. Einzelne Dateien oder Ausdrucke aus diesem Angebot können zusammen mit diesen Nutzungsbedingungen und den korrekten Herkunftsbezeichnungen weitergegeben werden.

Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Die systematische Speicherung von Teilen des elektronischen Angebots auf anderen Servern bedarf ebenfalls des schriftlichen Einverständnisses der Rechteinhaber.

## **Haftungsausschluss**

Alle Angaben erfolgen ohne Gewähr für Vollständigkeit oder Richtigkeit. Es wird keine Haftung übernommen für Schäden durch die Verwendung von Informationen aus diesem Online-Angebot oder durch das Fehlen von Informationen. Dies gilt auch für Inhalte Dritter, die über dieses Angebot zugänglich sind.

fonctions elliptiques et abéliennes (2 leçons par semaine). — Physique générale et mathématique; M. BRILLOUIN : Théories moléculaires de la matière et particulièrement la théorie dynamique des gaz, en tenant compte des échanges d'énergie entre l'éther et la matière (1 leçon). Principales méthodes mathématiques de la physique générale appliquées à l'Elasticité et à l'Acoustique (1 leçon).

---

## BIBLIOGRAPHIE

---

**Annuaire pour l'An 1906** publié par le bureau des Longitudes, avec Notices scientifiques. — 1 vol. in-16 de près de 900 p. avec figures ; prix : 1 fr. 50 (franco, 1 fr. 85) ; Gauthier-Villars, Paris.

La librairie Gauthier-Villars vient de publier, comme chaque année, l'*Annuaire du Bureau des Longitudes*, pour 1906. — On sait que ce petit volume compact fournit une foule de renseignements indispensables à l'ingénieur et à l'homme de Science. Cette année nous signalons tout spécialement la Notice de M. G. BIGOURDAN : *Les éclipses de Soleil. Instructions sommaires sur les observations que l'on peut faire pendant ces éclipses*,

RENÉ BAIRE. — **Leçons sur les fonctions discontinues**, professées au Collège de France et rédigées par A. Denjoy. — 1 vol. gr. in-8° de VIII-126 pages ; prix : 3 fr. 50 ; Gauthier-Villars, Paris.

Les fonctions discontinues sont-elles d'une nature totalement différente des fonctions continues ? Des considérations physiques extrêmement simples ont montré depuis longtemps qu'il n'en était rien. On peut chauffer une barre de façon tout à fait arbitraire et dans ces conditions la température peut être initialement une fonction discontinue de l'abscisse mais, dès que la barre sera abandonnée à elle-même, la température tendra à s'uniformiser d'un point à l'autre et sera une fonction continue de l'abscisse pour tout instant postérieur à l'instant initial. Remontons maintenant dans le temps en inversant les lois de la conductibilité thermique et nous concevons la possibilité de considérer la fonction discontinue primitive comme limite de fonctions continues. C'est là le premier point dont, s'occupe M. R. Baire mais dans un esprit très différent de ce qui précède. C'est au point de vue analytique seul qu'il considère le discontinu comme limite du continu. D'ailleurs les fonctions analogues à celle à laquelle nous venons de faire allusion ne rentrent que comme cas particulier dans celles considérées par l'auteur lesquelles peuvent exister lorsque la variable est dans un ensemble beaucoup plus général que celui des points d'un segment. A ce dernier point de vue, M. Baire a dû ajouter notablement à la théorie des ensembles ; on lui doit non seulement de beaux résultats mais de nombreuses définitions. Particulièrement intéressante est la considération des nombres *transfinis*,

nombres ordinaux non entiers, et dont l'introduction est cependant nécessaire, si l'on peut s'exprimer ainsi, pour numéroter les éléments de certains ensembles.

Dans l'étude proprement dite des fonctions d'une variable, l'esprit pénétrant de l'auteur se révèle tout de suite avec la notion de semi-continuité. D'une façon extrêmement brève, on peut considérer en un point d'un certain ensemble une fonction  $f$  ayant un minimum  $m$  et un maximum  $M$  en ce point. L'ordinaire condition de continuité se traduit par la double égalité  $f = m = M$ . Il y a semi-continuité quand l'une seulement de ces égalités a lieu. Un chapitre est consacré aux ensembles de points dans l'espace à  $n$  dimensions et l'on y retrouve avec une grande symétrie les considérations développées en détail pour l'espace à une dimension. Une des conclusions, les plus importantes du livre est relative aux développements de fonctions continues et discontinues en séries de polynômes. M. Baire n'a certainement pas livré toute sa pensée à cet égard; il nous renvoie pour terminer à un mémoire qui doit paraître incessamment aux *Acta mathematica*; le présent ouvrage y sera en tout cas une introduction aussi excellente que simple.

A. BUHL (Montpellier).

E. BOREL. — **Leçons sur les fonctions de variables réelles et les développements en séries de polynômes**, professées à l'École Normale supérieure et rédigées par Maurice Fréchet avec des notes par M. P. Painlevé et H. Lebesgue. — 1 vol. gr. in-8° de 160 pages; prix: 4 fr. 50; Gauthier-Villars, Paris, 1905.

Ce volume est le huitième de la *Collection de Monographies sur la Théorie des fonctions*. Il envisage les fonctions de variables réelles dans les voies récemment ouvertes par des œuvres comme la thèse de M. Baire.

A vrai dire il est assez difficile de distinguer bien nettement, tout au moins à l'heure actuelle, ce qui revient au champ réel et au champ complexe. Beaucoup de développements en séries de polynômes peuvent presque toujours servir à représenter indistinctement des fonctions analytiques ou non mais, comme les auteurs qui se sont occupés de ces épineux problèmes ont commencé par séparer les deux champs, il est nécessaire de commencer par accepter cette démarcation.

Aussi bien le fait de se cantonner d'abord dans les variables réelles permet de préciser, avec le maximum de simplicité, une foule de questions relatives par exemple à la continuité des fonctions représentées par des séries à termes continus ainsi qu'à l'intégration de ces mêmes séries. A propos du premier exemple rappelons la condition classique de convergence uniforme, condition inattaquable mais trop solide peut-être, et qui a été remplacée par les conditions plus élastiques de *convergence simplement uniforme* et de *convergence quasi-uniforme* dues respectivement à MM. Bendixson et Arzela.

Quand au développement des fonctions de variables réelles en séries de polynômes c'est là un cas particulier du problème extrêmement général de la représentation analytique approchée de fonctions non analytiques. En ces points on sent nettement que M. Borel a tenu, à l'exemple de Weierstrass, à rejeter des considérations intuitives qui, si elles n'ont pas la valeur rigoureuse de sa pure analyse, peuvent être cependant grandement utiles. Echauffons arbitrairement une barre: par le fait même la température en un point de la barre est d'abord une fonction tout à fait quelconque (continue

ou discontinue, analytique ou non) de l'abscisse de ce point. Au bout d'un temps fini, mais aussi court qu'on le veut, la température en question est devenue fonction analytique de la dite abscisse et par suite, en remontant le temps, la représentation analytique aussi approchée qu'on le voudra est toute trouvée. Que l'on mette cette idée en formules et l'on aura le procédé de Weierstrass et notamment la fameuse intégrale définie dont il se sert et qui n'a que le tort de paraître venir juste à propos sans qu'on sache pourquoi on a recours à elle plutôt qu'à une autre.

A la suite de la méthode de Weierstrass, M. Borel en expose d'autres dues à MM. Volterra, Lebesgue, Runge; il traite de l'extension de ces résultats aux fonctions de plusieurs variables et consacre des pages très intéressantes au problème de l'interpolation. La formule de Lagrange par exemple conduit bien à représenter une fonction par un polynôme mais, comme le remarque très justement l'auteur, il n'est pas sûr que la courbe parabolique ainsi employée se rapproche d'autant plus de la courbe arbitraire donnée qu'on donne un plus grand nombre de points de celle-ci. Aussi M. Borel tente de donner une théorie générale de l'interpolation qui ne soit pas soumise à des inconvénients de cette nature. La partie rédigée par lui se termine avec la représentation des fonctions discontinues. Ce que j'ai dit plus haut à propos de la méthode de Weierstrass montre immédiatement que le fait pour une fonction d'être représentable par une série de polynômes n'est nullement une preuve de continuité. C'est M. Baire qui a défini le premier les fonctions les plus générales représentables par des séries de polynômes. Le jeune et éminent analyste a donné aussi une classification des fonctions qui se rattache immédiatement au point de vue précédent. Les fonctions continues sont de classe zéro, les fonctions développables en séries de fonctions continues et qui ne sont pas continues sont de classe un, celles développables en séries de fonctions de classe un, et qui ne sont pas de classe un, sont dites de classe deux et ainsi de suite. Une fonction de classe  $n$  et représentable par une série multiple d'ordre  $n$  dont tous les termes sont des polynômes.

Voyons maintenant la note de M. Painlevé *Sur le développement des fonctions analytiques*. Le problème est de trouver un développement, valable non pas seulement dans un cercle comme le développement taylorien mais dans tout le plan sauf peut-être sur certaines demi-droites formant ce que M. Mittag-Leffler a appelé *l'étoile*. M. Painlevé obtient alors très élégamment des développements en séries de polynôme tels que ceux signalés pour la première fois par M. Fredholm. Le principe de la méthode peut s'exposer en deux mots. Considérons deux champs complexes, celui des  $\tau$  et celui des  $t$  puis une transformation conforme changeant les points d'affixe 0 et 1 du premier en les points 0 et 1 du second et réciproquement. Soient  $t = \varphi(\tau)$ ,  $\tau = \chi(t)$  les formules définissant cette transformation choisie en outre de façon à changer un contour aussi aplati qu'on le voudra enveloppant le segment 0 — 1 en un cercle  $\text{mod } \tau = \text{const} > 1$ . On a

$$f[\varphi(\tau)] = A_0 + A_1\tau + A_2\tau^2 + \dots$$

ce qui, pour

$$\tau = 1, \text{ est } f[\varphi(1)] \text{ ou } f(1) .$$

Mais si l'on compare

$$t = \lambda_1 \tau + \lambda_2 \tau^2 + \dots$$

avec

$$f(t) = a_0 + a_1 t + a_2 t^2 + \dots,$$

développement valable tout au moins dans le voisinage de l'origine, dans lequel on remplace  $t$  par la valeur de la formule précédente, on se convainc que  $A_0, A_1, A_2, \dots$  sont des combinaisons linéaires et homogènes de  $a_0, a_1, a_2, \dots$  et par suite  $f(1)$ , non représenté forcément par le développement précédent de  $f(t)$  pour  $t = 1$ , l'est par

$$A_0 + A_1 + A_2 + \dots$$

C'est ce que M. Painlevé appelle une *série génératrice normale*.

Le volume se termine par une seconde note de M. Henri Lebesgue qui revient sur le théorème de M. René Baire dont il a été question plus haut et par une troisième de M. Borel ou ce dernier s'attache à démontrer qu'il existe effectivement des fonctions dans toutes les classes de M. Baire.

A. BUHL (Montpellier).

**Catalogue international de la littérature scientifique**, publié par une commission internationale sous la direction de M. le Dr H. FORSTER MORLEY. A *Mathematics*. — 1 vol., 201 p. ; prix : fr. 18. 75. Gauthier-Villars, Paris ;

Cette importante publication est due à l'initiative de la *Royal Society* de Londres qui, depuis une dizaine d'années, a réuni une série de conférences internationales en vue de la publication d'un *Catalogue international de la Littérature scientifique*. Les différentes branches scientifiques ont été réparties comme suit en 17 groupes et feront l'objet de 17 volumes annuels.

A. Mathématiques.	G. Minéralogie.	N. Zoologie
B. Mécanique.	H. Géologie.	O. Anatomie humaine.
C. Physique.	J. Géographie.	P. Anthropologie physique.
D. Chimie.	K. Paléontologie.	Q. Physiologie.
E. Astronomie.	L. Biologie générale.	R. Bactériologie.
F. Météorologie.	M. Botanique.	

Il s'agit, comme on le voit, d'une entreprise considérable qui est appelée à rendre de grands services dans tous les domaines de la science ; elle sera particulièrement bien accueillie dans les branches qui, moins favorisées que les sciences mathématiques, ne possédaient pas encore de périodiques spécialement consacrés à la bibliographie, tels que le *Jahrbuch über die Fortschritte der Mathematik* et la *Revue semestrielle de publications mathématiques*.

Chaque volume donne, par ordre méthodique, les titres des ouvrages et des mémoires publiés pendant une année dans les Recueils scientifiques, à partir du 1<sup>er</sup> janvier 1901. Nous voudrions pouvoir dire de tous les ouvrages et mémoires publiés, mais il est matériellement impossible, surtout dans les premiers volumes, d'être absolument complet.

Le présent volume est consacré aux mathématiques. Il contient, après diverses notes d'introduction et listes : a) une classification des différentes

branches des mathématiques pures, suivie d'une table des matières (en quatre langues); *b*) le catalogue des ouvrages et mémoires par noms d'auteurs, puis *c*) par ordre des matières.

J. CLASSEN. — **Theorie der Elektrizität und des Magnetismus.** II. Band : *Magnetismus und Elektromagnetismus.* (Sammlung Schubert XLII.) — 1 vol. cart. in-8°, IX-251 pages; prix : Mk. 7; Göschen, Leipzig, 1904.

Nous avons déjà fait connaître aux lecteurs de l'*Enseignement mathématique* (n° 5, septembre 1904) la première partie de l'ouvrage de M. Classen sur l'électricité et le magnétisme.

La deuxième partie, dont nous voulons maintenant dire quelques mots, a pour objet le magnétisme et l'électromagnétisme.

L'exposition du magnétisme, d'après les idées de Maxwell, est faite par une méthode tout à fait semblable à celle de l'électrostatique (première partie) et que nous avons cherché déjà de résumer; mais les hypothèses fondamentales sont naturellement ici un peu diverses et pas toutes accessibles à l'expérience; il en résulte plus d'une difficulté et l'auteur ne s'en cache d'ailleurs pas.

La partie vraiment intéressante est l'électromagnétisme. Le point de départ de M. Classen, comme celui de plusieurs auteurs, est la loi de Biot-Savart et celle de Faraday sur l'induction (lois intégrales). Mais l'auteur commence, selon nous très à propos, par une hypothèse que l'on pourrait nommer loi différentielle ou hypothèse élémentaire, et qui n'est pas susceptible de vérification directe; elle donne les deux systèmes d'équations différentielles de Maxwell-Hertz, qui, dès à présent, formeront la base de l'exposition systématique de toute la théorie. Après avoir montré qu'elles renferment toute la théorie des phénomènes du magnétisme et de l'électrostatique, etc., l'auteur va les appliquer à l'étude de la propagation des ondes hertziennes dans l'espace et dans les fils, et à celui des courants alternés.

Nous recommandons vivement la lecture du petit livre de M. Classen aux jeunes physiciens avant qu'ils abordent l'étude toujours difficile des mémoires originaux sur les théories modernes de l'électrodynamique. Ils y trouveront, avec de très nombreux rappels à l'expérience, une théorie bien détaillée des principaux instruments de mesure, sans que la lecture soit arrêtée par des difficultés analytiques que M. Classen a eu soin d'écartier. Peut-être, croyons-nous, aurait-il été préférable d'employer les notations du calcul vectoriel fort utilisées maintenant dans toutes les théories électriques.

R. MARCOLONGO (Messine).

L. COUTURAT. — **L'Algèbre de la Logique.** 1 vol. de 100 pages in-8 écu; Collection Scientia. Prix : 2 fr. Gauthier-Villars, Paris.

Dans ce nouveau volume de la collection Scientia, M. Couturat présente un exposé très clair des principes et des théories élémentaires de l'Algèbre de la Logique. Fondée et développée au cours du XIX<sup>me</sup> siècle par G. BOOLE et E. SCHRÖDER, cette science a pour but d'exprimer les principes du raisonnement, les « lois de la pensée ».

L'auteur se limite à l'Algèbre de la Logique classique et se place au point de vue purement formel, qui est celui des mathématiques. Il part de la relation d'inclusion  $a \subset b$  ( $a$  est contenu dans  $b$ , ou  $a$  implique  $b$ ), qu'il envi-

sage comme notion première et par conséquent indéfinissable ;  $a$  et  $b$  désignent des concepts ou des propositions. La relation  $<$  peut se traduire approximativement par *donc* :  $a < b$  ou  $a$  donc  $b$ .

Le premier principe ou l'axiome de l'Algèbre de la Logique est le *principe d'identité*  $a < a$ . Un second principe est celui du *sylogisme* :

$$(a < b) (b < c) < (a < c).$$

Puis viennent les trois opérations, *la multiplication* et *l'addition logiques* et *la négation* et leurs principales propriétés et applications. M. Couturat présente d'abord la méthode de Boole et de Schröder qui offre une grande analogie avec l'Algèbre ordinaire : résolution des équations par rapport aux inconnues et éliminations des inconnues. Il expose ensuite la méthode de PORETSKY que l'on peut résumer en trois lois : la loi des formes, la loi des conséquences et la loi des causes.

Ce court aperçu montre, d'une façon très imparfaite, il est vrai, que l'Algèbre de la Logique est un algorithme possédant ses propres lois et susceptible d'être développé mathématiquement tant par sa forme que par sa méthode. Il s'agit d'une branche encore peu connue, surtout dans les pays de langue française : aussi faut-il savoir gré à M. Couturat d'en avoir fait l'objet de cet intéressant petit volume.

H. FEHR.

G.-O. JAMES. — **Elements of the Kinematics of a Point and the Rational Mechanics of a Particle.** 1 vol. gr. in-8°, XII, 176 p., prix : 2 Doll. ; John Wiley & Sons, New-York, 1905.

Ce petit traité de Mécanique élémentaire sert en quelque sorte de préparation aux études supérieures des écoles américaines ; il est écrit avec une extrême clarté.

La théorie des vecteurs, qui désormais doit faire partie du cours de Mécanique, est limitée aux règles de la composition et de la dérivation ; si l'auteur avait exposé les éléments de ce qu'on appelle le calcul vectoriel, toute son exposition aurait gagné beaucoup en simplicité. La Cinématique et la Mécanique proprement dite considèrent seulement le point matériel libre ou assujéti à quelques liaisons simples. L'exposition des principes de la Dynamique (chap. IX) est faite avec étendue et précision. L'auteur suit M. Mach pour la définition de la masse, et Kirchhoff pour celle de la force ; il envisage celle-ci comme « *a purely mathematical and not physical concept* » (page 110).

Le livre ne contient pas beaucoup d'applications ; toutefois, on y trouve l'étude des mouvements harmoniques, celui du mouvement des projectiles dans le vide, même en envisageant l'influence de la rotation de la terre. Qu'il nous soit permis d'observer que la théorie du pendule de Foucault (§ 182) eût été susceptible d'une exposition plus simple et que les équations du § 163 peuvent s'intégrer quelle que soit la valeur de  $\omega$ .

R. MARCOLONGO (Messine).

HENRI LEBESGUE. — **Leçons sur l'intégration et la recherche des fonctions primitives**, professées au Collège de France. — 1 vol. gr. in-8° de IV-142 pages ; prix : 3 fr. 50 ; Gauthier-Villars, Paris, 1904.

Les aperçus résumés en ce volume sur les problèmes de l'intégration paraîtront à coup sûr nouveaux à bien des lecteurs qui d'eux mêmes n'auraient pas soupçonné l'utilité des recherches approfondies auxquelles se livre M. Lebesgue. Il faut cependant reconnaître que l'idée de fonction s'élargissant sans cesse, des notions telles que celle de l'intégration doivent s'élargir aussi et se perfectionner notablement sous peine de n'avoir plus aucun sens dans les nouveaux domaines où la théorie des fonctions nous entraîne. Nous n'en sommes plus à l'ancienne fonction, la plus importante sans doute, qui n'était qu'une ordonnée variant continuellement avec une abscisse et dont l'intégrale existait au même titre que la notion d'aire. Nous considérons des fonctions dont la variable peut être dans des ensembles bien plus divers que celui des points formant un segment de l'axe des abscisses; pourvu qu'à une valeur de cette dernière prise dans l'ensemble corresponde une ordonnée nous avons une fonction au sens de Riemann. Qu'est-ce alors que l'intégrale? C'est la discussion approfondie de cette question qui fait l'objet des leçons de l'auteur. Il reprend la définition de Riemann et l'étend en la complétant. Remarquons spécialement le chapitre relatif à la mesure des ensembles où la notion d'ensemble mesurable au sens de M. Jordan (ensemble mesurable  $J$ ) est heureusement rapprochée des notions d'intégrales par excès et par défaut dues à M. Darboux. Cela conduit tout de suite à une très belle et très générale conception de l'idée d'aire. Et rien dans ces nouvelles définitions, qui paraîtront peut être bien abstraites et bien quintessenciées à ceux qui ne se sont pas encore heurtés à l'insuffisance des anciennes conceptions, n'est cependant superflu. Ne connaissons-nous pas des courbes dont l'aire est indéterminée comme par exemple celle de M. Peano qui passe par tous les points d'un carré?

Signalons aussi le très intéressant rapprochement des courbes rectifiables et des courbes quarrables.

Si la première partie du volume tend à établir une distinction entre les fonctions intégrables et non intégrables, la seconde, étudie la notion de fonction primitive elle-même dans les cas où cette notion à la raison d'être. L'ouvrage est donc aussi complet qu'on pouvait le souhaiter, et cependant, grâce à l'habileté de M. Lebesgue, il résume de nombreux mémoires dus à Riemann, Dirichlet, Darboux, Cantor, Hilbert, Borel, Baire et autres savants adonnés à l'étude de ces délicates questions.

A. BUHL (Montpellier).

E. LINDELÖF. — **Le Calcul des résidus et ses applications à la théorie des fonctions.** 1 vol. gr. in-8° de 144 pages, prix 3 fr. 50; Paris, Gauthier-Villars, 1905.

Ce volume est le neuvième de la *Collection de Monographies sur la Théorie des fonctions*. Il tranche de façon extrêmement nette sur les volumes précédents. Ces derniers, en effet, ont eu trait aux méthodes introduites tout récemment dans l'analyse et, dans des ouvrages comme ceux de MM. Lebesgue et Baire, on comprenait immédiatement que les auteurs exposaient leurs propres créations. M. Lindelöf nous ramène aux méthodes de Cauchy et rien à mon avis ne sera plus salutaire pour les jeunes géomètres souvent trop occupés de discuter des définitions, des idées logiques et qui délaissent et dédaignent le calcul, les opérations analytiques explicites, la supériorité esthétique indéniable que les égalités ont sur les inégalités. Que de chan-



gements à cet égard, je ne veux pas dire après des maîtres comme Cauchy, mais seulement après Hermite dont la mort est encore trop récente pour qu'on puisse oublier son œuvre.

Remercions donc M. Lindelöf de nous ramener dans ces magnifiques domaines.

Il nous rappelle d'abord les théorèmes généraux du calcul des résidus, l'usage qu'on peut en faire pour le développement des fonctions implicites et obtient en outre la célèbre formule de Lagrange ; il calcule aussi quelques intégrales définies et établit l'importante formule de M. Jensen. Nous voyons ensuite les formules sommatoires tirées du calcul des résidus lequel permet en effet d'exprimer la somme des valeurs que prend une fonction analytique pour des valeurs entières successives de la variable. La méthode résulte immédiatement de ce que le résidu de  $\pi \cot \pi z f(z)$  relatif à  $z = \nu$  ( $\nu$  entier) est  $f(\nu)$  et la formule ainsi obtenue, par des changements dans les variables ou dans les contours d'intégration, se présente sous des formes diverses et également intéressantes.

Des formules de cette nature, M. Lindelöf donne des applications variées et intéressantes. De nouvelles intégrales définies apparaissent et il exprime ainsi la constante d'Euler, les nombres Bernoulli, il étudie de même les sommes de Gauss. Si l'on cherche à effectuer le calcul explicite des intégrales définies introduites, celles-ci se prêtent, sous certaines restrictions, à des développements en séries qui constituent les formules sommatoires d'Euler et leurs analogues.

Voici maintenant les fonctions  $\Gamma(x)$ ,  $\log \Gamma(x)$ , la formule de Stirling, l'étude dans tout le plan de

$$\zeta(s) = 1 + \frac{1}{2^s} + \frac{1}{3^s} + \dots$$

toutes choses éminemment intéressantes et perfectionnées par Hermite, Hadamard, Lerch, Hurwitz, etc...

L'ouvrage se termine par une solution particulière du problème du prolongement analytique d'une série de Taylor, solution étudiée non seulement par M. Lindelöf mais par MM. Mellin et Le Roy. L'égalité

$$\sum \varphi(\nu) x^\nu = \int_C \frac{\varphi(z) x^z dz}{e^{2\pi iz} - 1}$$

en donne l'idée primordiale. Le premier membre n'existe que dans un cercle alors que le second existe en dehors.

Ces courtes citations ne donneront qu'une idée insuffisante de l'ouvrage court mais cependant très riche dont on peut conseiller la lecture comme exemple d'idées aussi belles que fécondes. A. BUHL (Montpellier).

R. MARCOLONGO. — **Meccanica razionale** (Manuali Hoepli). — 2 vol. in-16°, 271 + 324 pages ; prix : 3 L. chaque volume ; Ulr. Hoepli, Milan.

La Collection Hoepli vient de s'enrichir de deux nouveaux volumes qui seront d'autant mieux accueillis qu'il manquait précisément un manuel consacré à la Mécanique rationnelle. M. Marcolongo, professeur à l'Université de Messine, semblait tout particulièrement désigné pour entreprendre la

tâche assez difficile de condenser en deux petits volumes les notions essentielles de Mécanique rationnelle. S'il y est parvenu d'une manière aussi satisfaisante, c'est surtout grâce à l'emploi de la méthode vectorielle. Il est incontestablement plus simple d'opérer directement sur des vecteurs au lieu de faire intervenir les projections, l'exposé y gagne en clarté et en précision.

L'ouvrage est divisé en trois parties. Les deux premières, consacrées à la Cinématique et la Statique font l'objet du premier volume ; la troisième contient la Dynamique et les principes de la Mécanique des fluides forme le volume II.

Spécialement destiné aux étudiants, cet ouvrage est appelé à leur rendre de précieux services non seulement par l'exposé clair et bien ordonné des notions théoriques, mais aussi par les nombreux exercices qui terminent chaque chapitre.

H. FEHR.

H. MÜLLER et M. KUTNEWSKY. — **Sammlung von Aufgaben aus der Arithmetik, Trigonometrie und Stereometrie.** II. Teil, Ausgabe A. für Gymnasien. Zweite verbesserte und stark gekürzte Auflage. — 1 vol. in-8°, 273 p.; prix : Mk. 2,20 ; B. G. Teubner, Leipzig.

Ce livre offre en réalité plus que ne l'indique le titre, puisqu'il contient aussi des problèmes de Géométrie analytique sur les coordonnées et les coniques ; ceux-ci envisagent les uns le calcul, tandis que les autres ont en vue des constructions.

Dans la première partie, on trouve, à côté de problèmes appartenant à la Planimétrie, des questions empruntées à la vie pratique. D'une manière générale les auteurs ont accordé une large place aux applications. La Physique fournit une série de résolutions d'équations : relations entre le volume, le poids et la densité ; chute des corps, jet vertical ou oblique d'un mobile, plan incliné, gravitation ; puis les lois de Mariotte, d'Archimède, mesure des hauteurs à l'aide du baromètre, chaleur spécifique, Photométrie, réflexion et réfraction de la lumière, mesures électriques, applications des lois d'Ohm et de Kirchhoff.

Tout maître de mathématique qui comprend les besoins modernes fera très bon accueil à ces exercices, ainsi qu'aux problèmes des domaines de la Géographie mathématique, de la Nautique et de l'Astronomie.

Cette édition *réduite* renferme en tout 930 numéros dont la plupart contiennent 3 à 6, quelquefois même 22-28 exemples. Elle fait partie de la remarquable série de manuels<sup>1</sup> publiés avec beaucoup de soin par la maison Teubner sous la direction de M. H. Müller professeur au Gymnase « Kaiserin-Augusta » de Charlottenbourg.

Nous recommandons vivement cet Ouvrage à l'attention de tous les maîtres de mathématiques.

ERN. KALLER (Vienne).

Dr PROMPT. — **Remarques sur le théorème de Fermat.** — 1 brochure in-12° de 32 pages. Imp. Allier frères, Grenoble, 1905.

Cette petite brochure est intéressante par son originalité. Des poètes ont utilisé des *sixtines*, c'est-à-dire des ensembles de six vers que l'on répétait en permutant les rimes d'une certaine manière. Le Dr Prompt remarque que si l'on applique les mêmes règles de permutation à un nombre quelconque d'objets, toutes ces combinaisons, qui peuvent s'écrire sous forme de

<sup>1</sup> Prof. H. Müller's *Mathematisches Unterrichtswerk*, in 4 Abteilungen.

tableaux carrés ou rectangulaires suivant les cas, ont des propriétés remarquables à rapprocher de celles des carrés magiques. Un nombre passe d'une colonne à une autre d'une sextine suivant un chemin bien déterminé et l'on peut se proposer inversement de déterminer le nombre de la sextine qui parcourt un cycle donné. Ces considérations conduisant à des théorèmes intéressants notamment à celui-ci que  $2p - 1$  est divisible par  $p + 1$  si  $p$  est un nombre premier diminué de l'unité. On voit l'analogie avec l'un des célèbres théorèmes de Fermat, mais cependant la démonstration de M. Prompt ne paraît valable que pour le nombre 2. Il le reconnaît d'ailleurs lui-même et ne prétend publier sa brochure que pour signaler un mode de démonstration que l'on pourra peut-être généraliser. Il semble bien que son procédé relève un peu plus du hasard que de recherches méthodiques, mais il serait injuste cependant de ne pas reconnaître à ce travail assez de qualités pour intéresser les arithmologues.

A. BUHL (Montpellier).

J. REUSCH. — **Planimetriscbe Konstruktionen in geometrographischer Ausführung**, mit 104 Figuren im text. — 1 vol. br. in-8°, X-84 pages ; prix M. 1 ; B. G. Teubner, Leipzig.

Lorsque la solution d'un problème de Géométrie peut être construite par plusieurs procédés, il est naturel de chercher quel est *le meilleur*, si l'on sait exactement dire ce qu'il faut entendre par « *le meilleur procédé* » ; nous pensons qu'il serait bien difficile de donner à ces mots, pour tous les cas, une définition que tout le monde pourrait admettre ou qui permettrait de distinguer, parmi toutes les constructions connues ou possibles, une construction unique qui serait universellement prise pour la meilleure.

On pourrait, par exemple, considérer comme le meilleur procédé, celui qui exige le plus petit nombre d'opérations matérielles ; les hommes de métier, tels que les dessinateurs dans les bureaux techniques, qui ne s'inquiètent que des règles d'exécution indépendamment de tout raisonnement, penseront ainsi assez naturellement parce qu'ils pourront qualifier matériellement ce procédé comme étant le plus simple. Or, en supposant que l'on puisse retrouver, distinguer et compter, dans une figure géométrique, le nombre de toutes les opérations matérielles qui ont été effectuées, il est facile d'imaginer, pour des instruments déterminés, une formule présentant d'une façon claire, la plus ou moins grande complication du tracé de la figure.

M. LEMOINE a, le premier, donné à cette idée une forme concrète que nous allons rappeler brièvement.

Si l'on suppose l'emploi de la règle, on peut vouloir distinguer deux opérations dont nous faisons suivre l'indication par des notations représentatives correspondantes :

Faire passer le bord d'une règle par un point . . . . . op. : R<sub>1</sub> ;  
Tracer une ligne en suivant le bord de la règle. . . . . op. : R<sub>2</sub>.

On peut vouloir distinguer dans l'emploi du compas trois opérations :

Placer une pointe de compas sur un point donné . . . . . op. : C<sub>1</sub> ;  
Placer une pointe de compas sur un point indéterminé d'une ligne  
donnée . . . . . op. : C<sub>2</sub> ;  
Tracer une circonférence . . . . . op. : C<sub>3</sub>.

L'emploi de tout autre instrument tel que l'équerre, le compas de proportion, etc., donnerait lieu de même à des notations nouvelles, particulières aux opérations que l'on voudrait distinguer.

Toute construction géométrique faite avec la règle et le compas est donc représentée par le symbole

$$\text{op. : } (m_1 R_1 + m_2 R_2 + n_1 C_1 + n_2 C_2 + n_3 C_3), \quad (1)$$

dans lequel  $m_1$ ,  $m_2$ ,  $n_1$ ,  $n_2$  et  $n_3$  indiquent respectivement le nombre des opérations  $R_1$ ,  $R_2$ ,  $C_1$ ,  $C_2$  et  $C_3$ .

M. Lemoine appelle *Coefficient de simplicité* ou plus brièvement *simplicité*, le nombre  $m_1 + m_2 + n_1 + n_2 + n_3$ ; il appelle *coefficient d'exactitude*, ou plus brièvement *exactitude*, le nombre  $m_1 + n_1 + n_2$ ;  $m_2$  est le nombre de droites tracées;  $n_3$  est le nombre de circonférences tracées.

Les diverses constructions géométriques de la solution d'un problème pourront être comparées entre elles, au moyen du symbole (1), ou de tout autre symbole analogue, se rapportant à un plus grand nombre d'instruments et l'on comprend que cette comparaison a conduit, pour un grand nombre de problèmes, à la recherche de solutions nouvelles de plus en plus *simples* et a été féconde en excitant la sagacité et l'ingéniosité des géomètres. Ces recherches ont été classées sous le nom de *Géométopgraphie*, par M. Lemoine qui a donné à la *solution générale la plus simple* d'un problème, le nom de *Construction géométopgraphique*.

On voit donc que la *Géométopgraphie* a pour but de compter, en les distinguant, les opérations à exécuter, avec des instruments déterminés, pour obtenir la solution d'un problème de géométrie plane; de chercher de nouvelles solutions exigeant moins d'opérations que celles déjà connues; de comparer entre elles les solutions connues.

Remarquons bien que M. Lemoine ne prétend pas établir une correspondance parfaite entre ses formules, ses définitions et les cas de la pratique; c'est spéculativement qu'il admet que les opérations  $R_1$ ,  $R_2$ ,  $C_1$ ,  $C_2$ ,  $C_3$ , sont égales pour former les coefficients de simplicité et d'exactitude. Au reste, la géométopgraphie suppose que la feuille de dessin est aussi grande qu'il est nécessaire à l'exécution intégrale de la construction que l'on veut faire, que les instruments sont aussi petits ou aussi grands qu'il est utile, qu'un point est également bien déterminé, quel que soit l'angle sous lequel se coupent les deux lignes qui fixent le point, etc. (Voir E. Lemoine, *Géométopgraphie ou Art des constructions géométriques*. Paris, 1902).

Le travail de M. Reusch a pour but de répandre, dans les écoles, la méthode donnée pour amener systématiquement la simplification des constructions planimétriques; il contient un exposé historique intéressant, signale dans les travaux de Steiner un passage exprimant très clairement les soucis de ce géomètre au sujet de la plus ou moins grande complication des constructions de la géométrie plane, et montre tout le mérite de la formule de M. Lemoine.

M. Reusch, comme M. Bernès, ne fait pas de différence entre les opérations  $C_1$  et  $C_2$  du symbole de M. Lemoine, estimant avec raison peut-être, que la distinction entre les opérations  $C_1$  et  $C_2$  est pratiquement sans utilité, si elle ne l'est pas théoriquement; il désigne par  $C_2$  l'opération consistant à tracer une circonférence et prend donc, pour l'exécution d'une construction faite au moyen de la règle et du compas, le symbole

$$l_1 R_1 + l_2 R_2 + m_1 C_1 + m_2 C_2,$$

un peu plus simple que le symbole de M. Lemoine.

Le travail de M. Reusch contribuera puissamment, dans son pays d'origine, à propager le goût des méthodes géométrographiques, à faire naître de nouvelles recherches et à enrichir le domaine pratique de la Géométrie plane; il est désirable que les professeurs de Géométrie le fassent connaître à leurs élèves.

F. CHOMÉ (Bruxelles).

J. RICHARD. — **Notions de Mécanique.** — 1 vol. in-8° de 224 pages. Prix: 4 fr.; de Rudeval, éditeur, Paris, 1905.

Cet ouvrage contient toutes les matières des programmes de mathématiques A et B et renferme en outre de nombreuses applications pratiques.

Dans une introduction philosophique et historique, l'auteur définit le caractère de la Mécanique, signale sans insistance inopportune les difficultés qui affectent les fondements de cette science, notamment la notion de force, esquisse un aperçu historique, dont l'intérêt est manifeste pour une science encore en évolution, enfin donne quelques judicieux conseils à l'élève sur la manière d'étudier.

La première partie de l'ouvrage, de beaucoup la plus importante, est consacrée à la Statique. Après avoir établi la notion de la force statique au moyen du dynamomètre et énuméré les différentes espèces de forces, l'auteur expose en tous détails la théorie de leur composition, tout en traitant les nombreuses et intéressantes propriétés géométriques qui s'y rattachent, parmi lesquelles nous relevons celles qui sont relatives au centre de gravité et à l'emploi des coordonnées barycentriques; signalons encore, parmi les applications pratiques, la théorie des appareils à peser et celle de l'équilibre de quelques machines.

La deuxième partie, qui commence par un préambule sur le rapport anharmonique et les triangles homologues, comporte des notions très étendues, bien que sommairement exposées, sur les polygones funiculaires et la statique graphique, avec applications pratiques, parmi lesquelles se trouve la théorie de la flexion des poutres droites.

La troisième partie comprend les premières notions de cinématique et les propriétés essentielles du déplacement d'une figure invariable dans un plan ainsi que l'étude des engrenages et de quelques systèmes articulés.

Enfin la quatrième partie est consacrée à des considérations générales sur les machines, après introduction des notions de travail et de force.

Cet ouvrage se recommande par l'ordre adopté dans l'exposition, l'élégante sobriété des démonstrations, la judicieuse répartition de l'espace entre les diverses matières, enfin par la très large part légitimement faite aux applications.

G. COMBEBIAC (Bourges).

R. SCHRÖDER. — **Die Anfangsgründe der Differential- und Integralrechnung.** — Für Schüler von höheren Lehranstalten und Fachschulen, sowie zum Selbstunterricht. — 1 vol. cart., 131 p.; prix: Mk. 1.60; B. G. Teubner, Leipzig.

Au moment où l'on tend à introduire dans l'enseignement secondaire supérieur les premières notions de calcul infinitésimal, ce petit volume mérite d'être signalé à tous ceux qui enseignent ces éléments. Les considérations théoriques sont limitées au strict nécessaire, par contre l'auteur donne un grand nombre d'exercices et d'applications. A ce point de vue c'est un

excellent recueil à mettre entre les mains des élèves. Voici les grandes divisions du manuel :

*Calcul différentiel* : Notion et propriétés de la dérivée. — Application du Calcul différentiel à la détermination des formes indéterminées ; aux maxima et minima ; à l'étude des courbes planes.

*Calcul intégral* : La notion d'intégrale. Méthodes d'intégration. — Application du Calcul intégral à la détermination de l'aire de surfaces planes et à la rectification de courbes planes. — Application du calcul infinitésimal à la Mécanique.

M.-E. WICKERSHEIMER. — **Les Principes de la Mécanique.** — 1 vol., 130 p., prix : 4 fr. Ch. Dunod, Paris.

On s'est beaucoup occupé, dans ces dernières années, du remaniement des fondements de la Mécanique, mais on doit convenir que les essais tentés jusqu'à présent en vue de cette reprise en sous-œuvre sont loin d'avoir donné toute satisfaction. M. Wickersheimer estime que, pour construire l'édifice nouveau que tout le monde attend, il faut d'abord que la démolition s'achève et que le terrain soit complètement déblayé. A cet effet, les notions essentielles de la Mécanique font successivement l'objet d'un examen approfondi, qui a pour effet de les dépouiller de la tare anthropomorphique, tout spécialement dénoncée par l'auteur.

C'est ainsi que le temps est réduit au rôle de variable indépendante dans le déplacement d'un corps quelconque et qu'une intéressante analyse de diverses expériences historiques montre que sa mesure n'est nullement impliquée dans l'idée de mouvement, mais n'est au contraire que le résultat d'une comparaison entre certaines vitesses. La question du mouvement absolu est approfondie. L'auteur met aussi en lumière les pétitions de principe cachées dans les méthodes classiques selon lesquelles sont introduites les notions de force et de masse. La notion de force statique soulève de vives critiques et semble devoir désormais céder le pas à la notion du travail ; celle-ci fait l'objet d'un développement important. Enfin un chapitre est consacré à la rotation de la terre.

G. COMBERIAC (Bourges).

---

## BULLETIN BIBLIOGRAPHIQUE

---

### 1. Sommaire des principaux périodiques :

**Acta Mathematica**, dirigé par MITTAG-LEFFLER, T. XXIX. Beijer, Stockholm.

Fasc. 3 et 4. — A. WIMAN : Ueber die Nullstellen der Funktionen  $E_a(x)$ . — H. POINCARÉ : Sur la méthode horistique de Gylden. — T. BRODÉN : Ueber eine Verallgemeinerung des Riemann'schen Problems in der Theorie der linearen Differentialgleichungen. — E. MAILLET : Sur les nombres  $e$  et  $\pi$  et les équations transcendentes. — M. LERCH : Essais sur le calcul du nombre des classes de formes quadratiques binaires aux coefficients entiers.