E. Lindelöf. — Le Calcul des résidus et ses applications à la théorie des fonctions. 1 vol. gr. in-8° de 144 pages, prix 3 fr. 50 ; Paris, Gauthier-Villars, 1905.

Autor(en): **Buhl, A.**

Objekttyp: **BookReview**

Zeitschrift: **L'Enseignement Mathématique**

Band (Jahr): **8 (1906)**

Heft 1: **L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE**

PDF erstellt am: **09.08.2024**

Les aperçus résumés en ce volume sur les problèmes de l'intégration paraîtront à coup sûr nouveaux à bien des lecteurs qui d'eux mêmes n'auraient pas soupçonné l'utilité des recherches approfondies auxquelles se livre M. Lebesgue. Il faut cependant reconnaître que l'idée de fonction s'élargissant sans cesse, des notions telles que celle de l'intégration doivent s'élargir aussi et se perfectionner notablement sous peine de n'avoir plus aucun sens dans les nouveaux domaines où la théorie des fonctions nous entraîne. Nous n'en sommes plus à l'ancienne fonction, la plus importante sans doute, qui n'était qu'une ordonnée variant continuement avec une abscisse et dont l'intégrale existait au même titre que la notion d'aire. Nous considérons des fonctions dont la variable peut être dans des ensembles bien plus divers que celui des points formant un segment de l'axe des abscisses ; pourvu qu'à une valeur de cette dernière prise dans l'ensemble corresponde une ordonnée nous avons une fonction au sens de Riemann. Qu'est-ce alors que l'intégrale ? C'est la discussion approfondie de cette question qui fait l'objet des leçons de l'auteur. Il reprend la définition de Riemann et l'étend en la complétant. Remarquons spécialement le chapitre relatif à la mesure des ensembles où la notion d'ensemble mesurable au sens de M. Jordan (ensemble mesurable J) est heureusement rapprochée des notions d'intégrales par excès et par défaut dues à M. Darboux. Cela conduit tout de suite à une très belle et très générale conception de l'idée d'aire. Et rien dans ces nouvelles définitions, qui paraîtront peut être bien abstraites et bien quintessenciées à ceux qui ne se sont pas encore heurtés à l'insuffisance des anciennes conceptions, n'est cependant superflu. Ne connaissons-nous pas des courbes dont l'aire est indéterminée comme par exemple celle de M. Peano qui passe par tous les points d'un carré ?

Signalons aussi le très intéressant rapprochement des courbes rectifiables et des courbes quarrables.

Si la première partie du volume tend à établir une distinction entre les fonctions intégrables et non intégrables, la seconde, étudie la notion de fonction primitive elle-même dans les cas où cette notion à la raison d'être. L'ouvrage est donc aussi complet qu'on pouvait le souhaiter, et cependant, grâce à l'habileté de M. Lebesgue, il résume de nombreux mémoires dus à Riemann, Dirichlet, Darboux, Cantor, Hilbert, Borel, Baire et autres savants adonnés à l'étude de ces délicates questions.

A. Buhl (Montpellier).

E. Lindelöf. — **Le Calcul des résidus et ses applications à la théorie des fonctions.** 1 vol. gr. in-8° de 144 pages, prix 3 fr. 50 ; Paris, Gauthier-Villars, 1905.

Ce volume est le neuvième de la *Collection de Monographies sur la Théorie des fonctions*. Il tranche de façon extrêmement nette sur les volumes précédents. Ces derniers, en effet, ont eu trait aux méthodes introduites tout récemment dans l'analyse et, dans des ouvrages comme ceux de MM. Lebesgue et Baire, on comprenait immédiatement que les auteurs exposaient leurs propres créations. M. Lindelöf nous ramène aux méthodes de Cauchy et rien à mon avis ne sera plus salutaire pour les jeunes géomètres souvent trop occupés de discuter des définitions, des idées logiques et qui délaissent et dédaignent le calcul, les opérations analytiques explicites, la supériorité esthétique indéniable que les égalités ont sur les inégalités. Que de changements à cet égard, je ne veux pas dire après des maîtres comme Cauchy, mais seulement après Hermite dont la mort est encore trop récente pour qu'on puisse oublier son œuvre.

Remercions donc M. Lindelöf de nous ramener dans ces magnifiques domaines.

Il nous rappelle d'abord les théorèmes généraux du calcul des résidus, l'usage qu'on peut en faire pour le développement des fonctions implicites et obtient en outre la célèbre formule de Lagrange ; il calcule aussi quelques intégrales définies et établit l'importante formule de M. Jensen. Nous voyons ensuite les formules sommatoires tirées du calcul des résidus lequel permet en effet d'exprimer la somme des valeurs que prend une fonction analytique pour des valeurs entières successives de la variable. La méthode résulte immédiatement de ce que le résidu de $\pi \cot \pi z f(z)$ relatif à $z = \nu$ (ν entier) est $f(\nu)$ et la formule ainsi obtenue, par des changements dans les variables ou dans les contours d'intégration, se présente sous des formes diverses et également intéressantes.

Des formules de cette nature, M. Lindelöf donne des applications variées et intéressantes. De nouvelles intégrales définies apparaissent et il exprime ainsi la constante d'Euler, les nombres Bernoulli, il étudie de même les sommes de Gauss. Si l'on cherche à effectuer le calcul explicite des intégrales définies introduites, celles-ci se prêtent, sous certaines restrictions, à des développements en séries qui constituent les formules sommatoires d'Euler et leurs analogues.

Voici maintenant les fonctions $\Gamma(x)$, $\log \Gamma(x)$, la formule de Stirling, l'étude dans tout le plan de

$$\zeta(s) = 1 + \frac{1}{2^s} + \frac{1}{3^s} + \dots$$

toutes choses éminemment intéressantes et perfectionnées par Hermite, Hadamard, Lerch, Hurwitz, etc...

L'ouvrage se termine par une solution particulière du problème du prolongement analytique d'une série de Taylor, solution étudiée non seulement par M. Lindelöf mais par MM. Mellin et Le Roy. L'égalité

$$\sum \varphi(\nu) x^\nu = \int_C \frac{\varphi(z) x^z \, dz}{e^{2\pi i z} - 1}$$

en donne l'idée primordiale. Le premier membre n'existe que dans un cercle alors que le second existe en dehors.

Ces courtes citations ne donneront qu'une idée insuffisante de l'ouvrage court mais cependant très riche dont on peut conseiller la lecture comme exemple d'idées aussi belles que fécondes. A. Buhl (Montpellier).

R. Marcolongo. — **Meccanica razionale** (Manuali Hœpli). — 2 vol. in-16°, 271 + 324 pages ; prix : 3 L. chaque volume ; Ulr. Hœpli, Milan.

La Collection Hœpli vient de s'enrichir de deux nouveaux volumes qui seront d'autant mieux accueillis qu'il manquait précisément un manuel consacré à la Mécanique rationnelle. M. Marcolongo, professeur à l'Université de Messine, semblait tout particulièrement désigné pour entreprendre la