Zeitschrift: L'Enseignement Mathématique
Herausgeber: Commission Internationale de l'Enseignement Mathématique
Band: 8 (1906)
Heft: 1: L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE

Artikel: UNE LEÇON SUR LA GÉOMÉTRIE. DE L'AJUSTAGE
Autor: Andrade, Jules
DOI: https://doi.org/10.5169/seals-9257

Nutzungsbedingungen
Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Mehr erfahren

Conditions d'utilisation
L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. En savoir plus

Terms of use
The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. Find out more

Download PDF: 15.07.2025

ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, https://www.e-periodica.ch

UNE LEÇON SUR LA GÉOMÉTRIE DE L'AJUSTAGE

Cette leçon sur la géométrie de l'ajustage est la troisième d'un enseignement d'initiation.

Résumons d'abord sommairement les idées et les faits qui la précèdent.

Dans une première leçon ont été exposés les faits primitifs de la géométrie, faits que la raison accepte et qui dérivent, à n'en pas douter, des expériences des muscles et des yeux de nos ancêtres, répétées par nos propres organes et affirmées sous les vocables de *principes* ou de *postulats*.

L'expérience que nous avons vécue, dans notre contact répété avec les corps solides nous a suggéré la notion de *corps rigides*, amorphes d'ailleurs et possédant un *ensemble* de points, mais déterminés dans leurs situations par rapport aux corps rigides voisins par les situations de *certains* de leurs points.

Par exemple, on peut *clouer* un corps rigide par *deux* de ses points sur un autre corps rigide, à l'égard duquel le premier se déplace ; ce dernier, par rapport au premier, joue le rôle d'espace.

L'expérience nous suggère qu'on peut toujours lier alors au premier corps rigide d'autres points formant *une ligne* et qui, *immobiles*, resteront communs au premier corps rigide et au second ; alors, le premier corps rigide ne pourra plus prendre qu'une sorte de *déplacement*, en sorte que si on lui impose la condition de passer *d'une position à une autre* sans jamais repasser par les positions intermédiaires *avant* de revenir à sa position *de départ* on définira d'une manière complète un seul déplacement possible en deux sens différents ; naturellement on ne considère ici que l'ordre des situations rencontrées et non pas *le plus ou moins de rapidité* dans leurs successions ; ce déplacement est une *rotation*.

La ligne des points fixes, commune au corps en mouvement et à l'espace environnant est une *droite* ou encore un *axe de rotation.*

Les propriétés suivantes complètent la définition de la droite.

1° Après superposition préalable de deux couples convenables de leurs points, deux droites peuvent être superposées l'une sur l'autre de deux manières différentes.

2° Toute droite n'est prolongeable que d'une seule manière ; *et tout point de la droite est accessible par un cheminement fini* sur la droite.

3° Toute droite est définie en situation par les situations de deux de ses points, pourvu toutefois que ces deux points, appartiennent à une portion de droite *déjà existante* et dont *l'étendue* ne dépasse pas une certaine portion assignable de droite, que nous nommerons *la distance réduite.*

Dans la géométrie de la droite ouverte, on verra plus loin que la distance réduite est infinie.

4° Si A et B sont deux points *suffisamment* rapprochés d'un même point O, ces deux points sont aussi *joignables* par une portion définie de droite moindre que la distance réduite et que nous appellerons AB, et si on considère alors les droites que l'on peut définir par la jonction de O aux différents points de la portion AB, ces différentes portions de droite moindres que la *distance réduite* formeront un ensemble de points, que l'on nomme une *trame triangulaire ;* la propriété essentielle d'une trame triangulaire est de rester inaltérée par la permutation des rôles joués par les points O, A, B.

On définit ainsi *l'intérieur du triangle* AOB ou un *morceau* de plan ; et on en déduit, tout au moins dans un domaine *suffisamment réduit* la distinction des deux régions d'une trame à l'égard d'une droite joignant deux points de la trame.

5° L'extension de la trame triangulaire autour d'un point O, dans une trame plus étendue, à l'intérieur de laquelle se trouve le point O donne la notion des angles plans dont la propriété essentielle sera de pouvoir se reproduire par *glissement* et *renversement.*

6° La rotation d'une trame autour d'une droite de cette trame passant par O épuise tous les points de l'espace qui peuvent être *dans le voisinage* du point O ; en d'autres termes, la position d'un point sur une droite étant définie par un seul renseignement *quantitatif,* la position d'un point d'une trame sera définie par 2 renseignements quantitatifs, et enfin la position d'un point de l'espace sera définie par 3 renseignements quantitatifs.

En d'autres termes la droite est un ensemble à *une dimension,* la trame est un ensemble à 2 dimensions, et l'espace est un ensemble à 3 dimensions.

7° Si deux trames ou plans ont un point O commun ils ont une droite commune passant par ce point.

Avec ces premières données, la deuxième leçon de la géométrie naturelle construit la théorie de l'angle droit, les cas d'égalité des triangles quelconques et des triangles rectangles formés dans le voisinage d'un point O, et enfin les propriétés essentielles de l'angle trièdre et des angles polyèdres. Après avoir rappelé ces propriétés classiques des trames triangulaires, nous allons nous servir de celles-ci comme de véritables ponts jetés d'une figure à l'autre et obtenir la notion *des deux déplacements fondamentaux d'un solide.*

Sans insister ici sur les détails de démonstrations connues, nous soulignerons au contraire les idées propres à la géométrie nouvelle.

Théorème I. Si une droite passant par un point O d'un plan P est perpendiculaire à deux droites distinctes menées par O dans ce plan elle est perpendiculaire à toutes les droites issues de O dans ce plan.

(Démonstration bien connue).

Définition; une telle droite est dite perpendiculaire au plan P.

Théorèmes II: 1° Pour mener d'un point I situé hors d'un plan P une droite perpendiculaire à ce plan il suffit de projeter I en H sur une droite XY du plan P, de mener dans P et par H la perpendiculaire HZ à XY puis de projeter I en O sur HZ ; O est dit la projection de I sur P.

2° Réciproquement pour projeter un point I sur une droite

XY de P il suffit de projeter I sur le plan P en O puis de projeter O sur XY.

(Démonstrations connues),

Corrollaires: 1° par un point I on peut toujours mener une perpendiculaire au plan P et une seule; tout au moins si le point I est dans un suffisant voisinage d'un point du plan.

2° Par un point O d'un plan on peut toujours élever une droite perpendiculaire à ce plan et une seule.

3° Par un point O d'une droite on peut toujours mener un plan perpendiculaire à une droite et un seul.

4° Quand une droite coupe un plan P en O les projections de ses points sur ce plan forment une droite et la perpendiculaire à cette projection menée par O dans le plan P est perpendiculaire au plan qui contient la droite et sa projection (plan projetant).

Remarque. — La démonstration connue des corollaires 2° et 3° des théorèmes II repose sur le postulat 7 énoncé plus haut; il est intéressant d'observer que ce postulat 7 peut être remplacé par ce postulat équivalent:

« Qand un solide tourne autour d'une droite, tous les demi-
« plans du solide qui passent par cette droite et qui sont
« entraînés dans le mouvement du solide se rabattent *en un*
« *même instant* sur les prolongements respectifs de leurs
« primitives situations. »

Adoptons en effet ce postulat, ou *principe du demi-tour* et proposons nous d'en déduire le postulat 7.

Soit OI une droite perpendiculaire au plan P menée par le point O de ce plan; soient OA et OB deux droites distinctes du plan P; concevons l'angle AÔB partagé en 3 parties égales par les droites OC et OD intermédiaires; considérons un solide lié à OA, OC et OI; faisons tourner ce solide autour de OC de manière que l'angle AÔC se renverse sur l'angle COD; d'après ce postulat du demi-tour, la droite OI après ce renversement est venue sur le prolongement de sa position primitive; donnons ensuite au solide une rotation autour de OD de manière que l'angle COD se renverse sur l'angle DOB, la droite OI reprend alors sa situation primitive.

Si donc *une autre droite* OJ perpendiculaire au plan P et

issue de O existait les deux déplacements considérés la rétabliraient elle aussi dans sa situation primitive ; dès lors le déplacement qui finalement a fait glisser AÔC sur l'angle DÔB aurait laissé immobiles les deux droites OI et OJ ce qui est impossible d'après les autres postulats.

Donc par le point O on ne peut mener qu'une perpendiculaire au plan P ; on en conclut immédiatement que par un point d'une droite on ne peut mener qu'un plan perpendiculaire à la droite ; et de là enfin on conclut que si deux plans ont un point commun ils ont en commun toute une droite qui passe par ce point, c'est-à-dire précisément le postulat 7.

Inversement, la théorie du dièdre nous montrera tout à l'heure que le postulat 7 fournit à son tour le principe du demi-tour.

Définitions. — Nous appelons *angle dièdre* la figure formée par l'ensemble de deux demi-plans réunis par une droite commune qui limite les deux demi-plans considérés. Cette droite commune se nomme l'*arête* du dièdre ; les demi-plans que nous n'envisagerons d'ailleurs que dans le voisinage de l'arête se nomment les *faces* du dièdre. Si par un point de l'arête on mène dans les deux faces respectivement deux droites perpendiculaires à l'arête, on forme dans un plan perpendiculaire à cette arête un angle plan que nous nommerons : *un angle rectiligne.*

Théorème III. — Tous les angles rectilignes d'un dièdre sont égaux.

Nous partagerons la démonstration en 2 parties :

1° Si un angle rectiligne d'un dièdre est droit, tous les angles rectilignes sont droits.

2° Deux angles rectilignes quelconques d'un même dièdre sont égaux.

La première proposition est une conséquence du corollaire 4 des théorèmes II :

En effet soit O H la projection de I H sur le plan P ; la droite J H menée dans le plan O I H perpendiculairement à O H est (Th. II, corol. 4) perpendiculaire au plan P, en sorte que O H est aussi la projection de O J.

Le plan qui projette à la fois sur P les deux droites O J et

I H forme avec le plan P un dièdre dont les deux angles rectilignes I O U et J H X sont droits, d'après les théorèmes 2.

Enfin la seconde proposition résulte de la remarque fondamentale suivante :

Considérons deux dièdres *adjacents* c'est-à-dire ayant même arête et séparés par une face commune ; en deux points O et O′ de l'arête formons des angles rectilignes $\sphericalangle$ A et $\sphericalangle$ B en O, $\sphericalangle$ A′ et $\sphericalangle$ B′ en O′, les angles rectilignes $\sphericalangle$ A et $\sphericalangle$ B seront dans le même rapport que les angles rectilignes $\sphericalangle$ A′ et $\sphericalangle$ B′.

La démonstration s'achève immédiatement par la considération d'une commune mesure entre les deux rectilignes de même sommet et par les rotations successives qui font glisser sur O chaque partie aliquote sur la suivante.

Cette remarque rapprochée de la 1re partie de la démonstration établit la seconde partie du théorème 3.

Définition. — Nous appellerons mesure de l'angle dièdre, la valeur commune de ses angles rectilignes.

Théorème IV. — Quand une figure plane faisant partie d'un solide glisse dans son plan P en conservant un point fixe O, ce mouvement équivaut à une rotation autour de la perpendiculaire élevée de O sur le plan P. Ce théorème est une simple conséquence des corollaires des théorèmes II. Mais la forme de cette conséquence est importante à considérer.

Corollaire. — En rapprochant ce théorème du théorème 3 nous voyons que dans une rotation tous les plans passant par l'axe de rotation tournent du même angle ; et en particulier nous retrouvons le principe du demi-tour déduit du postulat 7.

Théorème V. — Etant donnée une droite A B de l'espace cette droite est l'axe de deux mouvements simples pour un solide.

1° Une rotation autour de la droite.

2° Un glissement simple du solide, dans lequel tous les plans du solide qui passent par A B ne font que glisser sur eux-mêmes en même temps que la droite A B du solide glisse sur elle même.

Ce dernier mouvement s'appelle une *translation*, la droite

de l'espace sur laquelle glisse alors la droite du solide se nomme *l'axe de la translation*.

La première partie de ce théorème est évidente, la seconde est une conséquence de l'égalité des angles rectilignes d'un dièdre.

La leçon donnée à des débutants peut se terminer ici ; à des élèves plus mûrs qui révisent on peut donner les compléments qui suivent :

Droite ouverte ou droite fermée ; Symétrie.

Après cet exposé des conséquences des postulats déjà exposés il nous reste à spécialiser les modes de jonction de points par des droites.

En cheminant sur une droite D à partir d'un point O, nous avons admis qu'on rencontrait d'abord et sur une étendue finie, des points qui ne sont *joignables* à O que par une seule droite.

Dès lors, de deux choses l'une : ou tous les points de D auront la même propriété et il en sera de même de toutes les droites de l'espace, ou bien en cheminant dans un certain sens sur D, on rencontrera tôt ou tard et pour la première fois un point O′ joignable à O par une seconde droite D′. En rabattant le plan P des deux droites D′ et D autour de D′ nous trouverons une seconde droite D″ égale à D qui joindra O et O′, mais alors on peut aussi amener D″ sur D par une rotation convenable autour d'une perpendiculaire à P élevée de O ; mais alors O′ n'ayant pas bougé par cette rotation appartient à l'axe de cette rotation , ainsi la perpendiculaire $\triangle$ au plan P en O recoupe le plan en O′) le plan de cette perpendiculaire et de la droite D étant rabattu autour de $\triangle$ nous montre alors que la droite D est fermée et que les points O et O′ la partagent en portions égales.

En désignant alors par L le demi-tour de la droite on voit que toute droite est le lieu des points équidistants de $\frac{L}{2}$ de l'un des deux points où se coupent les perpendiculaires à la droite menées dans l'un des plans passant par la droite, ces points sont les pôles de la droite dans le plan considéré. Si un point M d'un plan n'est pas le pôle d'une droite D de ce

plan, il y a alors deux distances réduites du point M à la droite ; mais l'une ou l'autre de ces distances étant prolongée d'une longueur égale fournit un même point M′, en d'autres termes si les distances d'un point à une droite fermée sont au nombre de 4, ce point n'a cependant qu'un seul symétrique par rapport à la droite.

Dans cette géométrie de la droite périodique ou fermée sur elle même il convient de ne donner le nom de triangle qu'aux triangles propres c'est-à-dire à ceux dont les côtés sont moindres que L et leurs angles opposés moindres que 2 droits. L'existence de ces triangles sera assurée par l'étude des angles trièdres faite d'abord dans un *voisinage suffisant* du sommet puis par l'étude de la sphère ; la théorie du dièdre faite dans cette leçon nous montre qu'alors deux triangles sphériques qui sont les images sphériques d'un même trièdre ont les mêmes angles ; comme dans la géométrie de la droite fermée le plan est une variété de sphère, la remarque faite sur les triangles propres est justifiée.

Ces dernières considérations qui anticipent sur la quatrième leçon de la géométrie de l'ajustage n'ont dans la géométrie de la droite fermée d'autre intérêt que celui de préparer pour cette géométrie la formation des propriétés métriques et la mesure des étendues qui constitue l'étude du second livre de la géométrie naturelle.

Nous exposerons, pour terminer, les lois de la symétrie, en nous limitant pour abréger à la géométrie de la droite ouverte.

LOI DE LA SYMÉTRIE

Définitions. — Nous appellerons point symétrique d'un point donné M par rapport à un plan P le point M′ obtenu en menant de M une droite perpendiculaire sur P et la prolongeant d'une longueur égale.

De même le symétrique d'un point M par rapport à un point O est le point M″ obtenu en joignant M à O par une droite que l'on prolonge d'une quantité égale au delà de O.

On définira de même les figures symétriques d'une figure, ensemble de points.

Théorème VI. — Soit O un point d'un plan P et soit F une figure ensemble de points soit F′ la figure symétrique de F par rapport à P et F″ la figure symétrique de F par rapport au plan P les figures F′ et F″ sont superposables.

Démonstration. — Soit M′ le symétrique d'un point M de F par rapport à P et M″ le point symétrique de F par rapport au point O soit H le pied de la perpendiculaire menée de M sur P; O M = O M′ (obliques s'écartant également du pied de la perpendiculaire O H.)

La droite O H est donc bissectrice de l'angle M O M′; dans le triangle isocèle O M′ M″ la droite qui joint le sommet O au milieu I de la base M′ M″ est perpendiculaire à cette base en même temps que bissectrice de l'angle M″ O M′, mais les deux bissectrices des deux angles adjacents supplémentaires M″ O M′ et M′ O M sont perpendiculaires l'une sur l'autre ; d'ailleurs la droite qui, menée dans le plan projetant O M sur P est perpendiculaire à la projection O H, est perpendiculaire à P.

La droite O I est donc indépendante du point M choisi, donc les figures F″ et F′ coïncideront quand on donnera à l'une un déplacement de un demi-tour autour de O I.

Dernière remarque. — Toutes les propriétés qui précèdent, complètent avec la théorie du triangle plan et, avec celle des triangles sphériques envisagés sur une même sphère la partie de la géométrie qui est indépendante du postulatum d'Euclide.

La géométrie indépendante du postulatum d'Euclide peut être appelée la géométrie de l'ajustage, car elle est l'étude des propriétés de l'espace qui permettent la reproduction d'un solide donné.

Ce problème revient en effet à des assemblages de barres, à des réalisations de rotations, de translations d'axes déterminés et à la matérialisation d'au moins une trame.

Limitée à la géométrie de la droite ouverte cette géométrie de l'ajustage a déjà fait l'objet d'une partie de mon enseignement à l'école alsacienne, dès 1889.

Jules ANDRADE (Besançon).

Décembre 1905.