SUR LES PRINCIPES DE LA MÉCANIQUE

SUR LES PRINCIPES DE LA MÉCANIQUE

Il y a différentes façons d'exposer la mécanique. On peut commencer par la statique, en faire une science indépendante; c'est ainsi qu'on procédait autrefois. Une autre méthode consiste à débuter par la dynamique, après avoir exposé, bien entendu, les éléments de Cinématique nécessaires.

Chacune de ces deux méthodes a ses avantages propres. Dans les phénomènes terrestres, dans les applications pratiques où les liaisons jouent un grand rôle, la première méthode parait préférable. La seconde au contraire paraît meilleure pour l'étude des phénomènes célestes, c'est pourquoi je nommerai cette dernière mécanique astronomique la première « mécanique terrestre. »

Dans la mécanique astronomique la notion de masse présente quelques difficultés; dans l'exposé suivant je me suis efforcé de rendre naturelle l'introduction de cette notion.

I. Notion de point matériel. Un point matériel est un volume de matière dont les dimensions sont insensibles. Toutefois dans certaines questions on est amené à considérer comme points matériels des volumes qui ne sont pas très petits. C'est ainsi qu'en Astronomie on traite le plus souvent les astres comme des points.

II. Principe de l'inertie. *Si un point matériel est isolé, son mouvement est rectiligne et uniforme.* En d'autres termes son accélération est nulle. Ce principe paraît invérifiable; on ne peut faire qu'un seul point matériel existe dans l'espace. Mais nous complétons le principe en admettant ce qui suit: « L'action d'un ou plusieurs points matériels sur un point matériel est insensible à de grandes distances. » Alors un point matériel très éloigné de tous les autres aura un mouvement sensiblement rectiligne et uniforme. L'étude des mouvements propres des étoiles est d'accord avec ce principe. Comme les mouvements de Sirius et de Procyon paraissaient n'être pas d'accord avec lui, on en a conclu que chacun de ces deux astres avait un satellite. Plus tard l'observation a confirmé cette prévision.

III. Principe de l'action et de la réaction. Je n'énoncerai pas tout d'abord ce principe. Je vais montrer qu'il est une sorte de généralisation du principe de l'inertie. Les points matériels sont en réalité des systèmes matériels très-petits. Le principe de l'inertie s'appliquant ainsi à un système matériel très-petit doit s'appliquer à un système quelconque. Pour généraliser le principe, le plus naturel est d'adopter l'énoncé suivant :

Si un système de points matériels est isolé, (c'est-à-dire très éloigné de tout autre système) il existe un point G, *intérieur à tout volume convexe contenant le système, qui possède un mouvement rectiligne et uniforme.*

Je ne dis pas que G est invariablement lié au système, car si le système n'est pas lui-même invariable cela n'aurait aucun sens. J'admets toutefois que G ne dépend pas des vitesses des points du système. Je nommerai le point G, centre du système.

Les points matériels ne sont pas tous identiques entre eux ; deux petits volumes égaux, l'un de plomb l'autre de fer ne sont pas pareils. Je vais considérer d'abord des systèmes formés de points tous identiques entre eux, que je nommerai *homogènes.* En admettant un principe supplémentaire que j'énoncerai tout à l'heure je vais démontrer la proposition suivante. *Le centre d'un système homogène est son centre des moyennes distances.* On sait que le centre des moyennes distances de n points est un point dont les coordonnées s'obtiennent en prenant la moyenne arithmétique des n coordonnées de ces points

$$x = \frac{x_1 + x_2 \ldots + x_n}{n}$$

et deux formules analogues pour y et z.

Supposons d'abord deux points A et B. Leur centre G, étant à l'intérieur de tout volume convexe contenant A et B doit se trouver sur la droite AB. Mais les points A et B étant identiques, G ne peut se trouver qu'au milieu de AB.

Considérons deux systèmes de points tous identiques entre eux soient G_1 et G_2 leurs centres. Si les deux systèmes ont le même nombre de points j'admettrai que le *centre du système total formé par la réunion de ces deux systèmes est encore le milieu de* $G_1 G_2$ comme si les deux systèmes étaient concentrés l'un en G_1 l'autre en G_2. C'est là le principe supplémentaire dont j'ai parlé tout à l'heure.

Revenons au théorème que nous voulons démontrer. Il est vrai pour deux points, nous l'avons vu. Supposons le vrai pour deux groupes ayant chacun n points identiques. Le point G_1 centre du premier groupe sera son centre de moyennes distances, de même le point G_2 centre du deuxième groupe. Le centre des $2n$ points sera alors le point G milieu de $G_1 G_2$. Or ce point G est bien le centre des moyennes distances des $2n$ points. (Si X est la moyenne arithmétique des abcisses des n premiers points, X′ celle des n autres, la moyenne arithmétique des abscisses des $2n$ points sera $\frac{X + X'}{2}$.)

Si donc le théorème est vrai pour n points quelconques il est vrai pour $2n$; comme il est vrai pour 2, il est vrai pour 4 puis 8, 16, 32... etc., c'est-à-dire pour $2p$, p étant un entier quelconque.

Pour étendre le théorème à un autre nombre de points, je fais les deux remarques suivantes.

1° Si au centre d'un système on place un ou plusieurs points, cela n'empêche pas le centre d'occuper toujours cette même place. C'est si l'on veut un nouveau principe, mais il paraît évident.

2° Si au centre des moyennes distances on place un ou plusieurs points le centre des moyennes distances du système obtenu par l'adjonction de ces points ne change pas. (La moyenne arithmétique de plusieurs quantités n'est pas changée, si on adjoint d'autres quantités toutes égales à cette moyenne arithmétique).

Cela posé, démontrons le théorème pour 25 points. Le théorème est vrai pour 32 points ; soit G le centre des 25 points. Au point G plaçons 7 points identiques aux premiers. Cela fera 32 points, et le point G sera le centre de ces 32 points. Le théorème étant vrai pour ces 32 points, G est leur centre des moyennes distances. D'après la remarque précédente, c'est donc aussi le centre des moyennes distances des 25 points primitifs.

La proposition est ainsi complètement démontrée.

Supposons maintenant des points identiques entre eux dont:

m_1 réunis en A_1 dont les coordonnées sont x_1, y_1, z_1.
m_2 A_2 x_2, y_2, z_2.

etc.

La moyenne arithmétique des abscisses sera alors :

$$x = \frac{m_1x_1 + m_2x_2 + \dots}{m_1 + m_2 + \dots}$$

en écrivant des formules analogues pour y et z, on aura les coordonnées du centre.

Lorsqu'on a ainsi m_1 points réunis en A_1 et m_2 réunis en A_2 tous identiques entre eux, on dira que les *masses* des points A_1 et A_2 sont proportionnelles à m_1 et m_2. Nous avons ainsi la notion de *masse.* Nous admettons alors que les points *non identiques* A_1 et A_2 peuvent être remplacés par un certain nombre de points identiques condensés en A_1, et un certain nombre condensés en A_2. Le rapport des deux nombres de points sera le rapport des *masses* des points matériels A_1 et A_2. Le point G centre du système, dont les coordonnées sont calculées ci-dessus, possède alors, lorsque le système est isolé, un mouvement rectiligne et uniforme. Considérons maintenant deux points A et B seulement, de coordonnées x, y, z, x', y', z' et de masses m et m', soient X, Y les coordonnées du centre G.

$$(1) \quad \left\{ \begin{aligned} X &= \frac{mx + m'x'}{m + m'} \\ Y &= \frac{my + m'y'}{m + m'} \\ Z &= \frac{mz + m'z'}{m + m'} \end{aligned} \right.$$

Soient γ et γ' les accélérations des deux points ; ce sont deux vecteurs dont les projections sur les axes sont les dérivées secondes par rapport au temps de x, y, z ; x', y', z'. En prenant les dérivées secondes des deux membres des équations (1) et observant que le point G a une accélération nulle, on voit que les projections sur les axes de la somme géométrique des deux vecteurs $m\gamma$, $m'\gamma'$ est nulle, donc ces vecteurs sont égaux parallèles et de sens contraires.

Si nous appelons *Action* de B sur A, le vecteur égal à $m\gamma$, dirigé dans le sens de l'accélération γ, on voit par ce qui précède que l'action de A sur B et celle de B sur A sont deux vecteurs égaux et de directions contraires.

Si l'on admet que cette action ne doit pas dépendre des vitesses absolues de A et de B, mais seulement de leur vitesse relative et de leur distance, comme la vitesse relative est dirigée suivant AB, une simple raison de symétrie montre que l'action doit aussi être dirigée suivant AB, en sorte que :

L'action de B sur A et l'action de A sur B sont deux vecteurs égaux et directement opposés.

On peut encore remarquer que si l'action de A sur B n'était pas dirigée suivant AB, l'action de A sur B et celle de B sur A tendraient à faire tourner AB autour de G dans le même sens, ce mouvement de rotation irait ainsi en s'accélérant ce qui paraît choquant.

IV. Principe de composition. *On obtient l'accélération produite sur un point A par un système de points B C D E en faisant la somme géométrique des accélérations que produiraient les points B C D E séparément.* L'action étant le produit de la masse de A par son accélération, le même principe peut s'énoncer en remplaçant le mot *accélération* par le mot *action*.

Le produit d'une masse par l'accélération de cette masse est appelé *Force*.

Les principes que nous venons d'énoncer et d'expliquer ne sont nullement évidents. Leur démonstration est expérimentale, elle se fait comme il suit : Ajoutons à ces principes la loi de l'attraction universelle.

L'action de A sur B, dirigée suivant B A est proportionnelle au produit des masses de A et de B, et à l'inverse du carré de la distance AB.

Cette loi ajoutée aux autres permet de trouver le mouvement d'un système de points. Or: appliquée aux astres du système solaire elle donne des résultats conformes à l'observation. Une loi différente ne donnerait pas le même résultat, comme on le démontre. C'est donc l'observation des astres qui fournit la vérification des principes précédents. On pourrait prendre chaque principe séparément et montrer comment il est vérifié ; je ne le ferai pas, me bornant à remarquer que cette vérification est extrêmement précise. La même précision n'est pas atteinte dans la plupart des autres lois physiques.

J'ai exposé les principes de la mécanique astronomique un peu longuement, avec presqu'autant de détails que je l'aurais fait devant des élèves. Je ne recommencerai pas pour la mécanique terrestre. Je me bornerai à de courtes indications sur cette seconde façon d'exposer la mécanique.

Une force est ce qu'on mesure avec un dynamomètre. Un dynamomètre pouvant être tendu par un poids, un poids est une force. La direction de cette force est toujours celle de la pesanteur, mais si l'on suspend un poids à un cordon passant sur une poulie, et que l'autre extrémité de ce cordon soit attachée au dynamomètre, le dynamomètre fléchit comme si le poids y était directement appliqué. La direction de la force est changée non son intensité. *On peut donc produire une force de direction et d'intensité quelconque à l'aide d'un poids.* La statique des forces est identique à la statique des poids. On pourra vérifier à l'aide de poids les propositions de statique.

On peut alors exposer la statique comme le fait Poinsot ou de toute autre manière.

La statique étant exposée on passera à la dynamique des corps pesants. La masse d'un corps pourra être définie expérimentalement comme le quotient du poids par l'accélération.

On pourra poser ensuite le principe de d'Alembert. La force d'inertie d'un point est le produit de sa masse par l'accélération qu'il possède, elle est de sens contraire à cette accélération. Le principe de d'Alembert consiste dans l'équilibre entre les forces d'inertie et les forces directement appliquées.

Le principe de d'Alembert se vérifie dans le cas simple des systèmes pesants ; dans d'autres cas il est une sorte de définition, car il y a des forces comme les frottements, la résistance de l'air, non mesurables statiquement. Ces forces sont définies de telle façon que le principe de d'Alembert demeure vérifié.

Il y a d'autres manières de faire. On peut par exemple exposer d'abord la statique, puis la dynamique astronomique indépendamment de la statique. Poser ensuite comme une sorte de postulat l'identité des deux notions de force. Par exemple si l'on mesure une attraction électrique statiquement, puis au moyen des oscillations d'un petit pendule, le postulat en question affirmera l'identité des deux valeurs obtenues.

J'arrête ici cette trop longue dissertation. Mon but principal était d'introduire d'une façon naturelle la notion de *masse* dans la mécanique astronomique.

J. Richard (Dijon).

APPLICATION DES MÉTHODES GÉOMÉTROGRAPHIQUES AU TRACÉ MÉCANIQUE DES COURBES PLANES

1. Nous nous proposons, dans cette courte note, de montrer comment on pourrait étendre les idées qui forment le fond de la Géométrographie au tracé des courbes planes au moyen de curvigraphes.

L'étude de chaque tracé comprendra deux parties :

1° Recherche du coefficient de simplicité du curvigraphe.

2° Simplicité et exactitude du tracé de la courbe, cette dernière partie comprenant le réglage du curvigraphe.