

# LA THÉORIE DES GROUPES APPLIQUÉE AUX MATHÉMATIQUES ÉLÉMENTAIRES

Autor(en): **Miller, G.-A.**

Objektyp: **Article**

Zeitschrift: **L'Enseignement Mathématique**

Band (Jahr): **9 (1907)**

Heft 1: **L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE**

PDF erstellt am: **09.08.2024**

Persistenter Link: <https://doi.org/10.5169/seals-10147>

## **Nutzungsbedingungen**

Die ETH-Bibliothek ist Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Inhalten der Zeitschriften. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern. Die auf der Plattform e-periodica veröffentlichten Dokumente stehen für nicht-kommerzielle Zwecke in Lehre und Forschung sowie für die private Nutzung frei zur Verfügung. Einzelne Dateien oder Ausdrucke aus diesem Angebot können zusammen mit diesen Nutzungsbedingungen und den korrekten Herkunftsbezeichnungen weitergegeben werden. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Die systematische Speicherung von Teilen des elektronischen Angebots auf anderen Servern bedarf ebenfalls des schriftlichen Einverständnisses der Rechteinhaber.

## **Haftungsausschluss**

Alle Angaben erfolgen ohne Gewähr für Vollständigkeit oder Richtigkeit. Es wird keine Haftung übernommen für Schäden durch die Verwendung von Informationen aus diesem Online-Angebot oder durch das Fehlen von Informationen. Dies gilt auch für Inhalte Dritter, die über dieses Angebot zugänglich sind.

## LA THÉORIE DES GROUPES APPLIQUÉE AUX MATHÉMATIQUES ÉLÉMENTAIRES

---

NOTE DE LA RÉDACTION. — On connaît le rôle fondamental que joue en mathématiques la notion de groupe ; elle fournit une idée directrice qu'on ne saurait mettre assez en lumière et dont doivent s'inspirer de plus en plus tous ceux qui enseignent. Mais on ne possédait guère d'exposé se limitant aux applications les plus élémentaires. Nous croyons donc intéresser nos lecteurs en leur donnant ici la traduction d'une Note<sup>1</sup> de M. G.-A. MILLER, professeur à l'Université d'Illinois (Etats-Unis), qui a déjà consacré de nombreuses et importantes recherches à la théorie des groupes. Nous la ferons suivre d'une note ayant en vue plus particulièrement la théorie des parallèles ; elle est extraite d'un récent mémoire de M. C. BOURLET, professeur au Conservatoire des Arts et Métiers de Paris.

A la cinquième assemblée annuelle de l'Association suisse des professeurs de mathématiques, tenue à Zurich le 9 décembre 1905, le Professeur H. FEHR, de l'Université de Genève, donna un bref aperçu de quelques tendances actuelles dans l'enseignement de la Géométrie élémentaire. Il insista spécialement sur le fait que le maître devrait se familiariser avec la notion de groupe, qui joue actuellement un rôle si fertile dans les développements mathématiques<sup>2</sup>.

Le présent article a pour objet de donner quelques applications de la notion de groupe aux mathématiques élémentaires. Nous espérons qu'il pourra servir non seulement de première initiation aux éléments de la théorie des groupes, mais aussi de moyen d'arriver à des notions plus étendues se rapportant à quelques sujets fondamentaux des mathématiques élémentaires.

Nous considérerons d'abord les deux opérations de sous-

---

<sup>1</sup> *V. School Science and Mathematics*, dec. 1906, Chicago. — Reproduite avec l'autorisation de l'auteur. Traduction de J.-P. DUMUR (Genève).

<sup>2</sup> *L'Enseignement Mathématique* (8<sup>e</sup> année, p. 54, 1906).

traire de 1 et diviser 1. La première opération sera représentée par  $s$  et la dernière par  $d$ . Les deux opérations successives, d'abord soustraire de 1 et ensuite diviser 1 par le reste, seront représentées par  $sd$ . Il est facile de prouver qu'en effectuant  $sd$  trois fois successivement en partant d'un nombre quelconque, on retrouve le nombre primitif. Par exemple, si nous partons de 2 et effectuons  $sd$  sur lui, nous arrivons à  $-1$ ; effectuant  $sd$  sur  $-1$  nous arrivons à  $\frac{1}{2}$ ; effectuant  $sd$  sur  $\frac{1}{2}$  nous obtenons 2. En général, si nous effectuons l'opération  $sd$  successivement sur le nombre  $n$ , nous obtenons les trois nombres suivants :  $\frac{1}{1-n}$ ,  $\frac{n-1}{n}$ ,  $n$ .

Les trois nombres  $n$ ,  $\frac{1}{1-n}$ ,  $\frac{n-1}{n}$  sont distincts, excepté lorsque  $n$  a l'une des valeurs suivantes :  $\frac{1}{2} \pm \frac{1}{2} \sqrt{-3}$ . Par conséquent, l'opération  $sd$  combine tous les nombres (réels et imaginaires) en collections de trois, à l'exception des deux nombres ci-dessus mentionnés. Si l'un des nombres d'une telle collection est réel tous sont réels, et si l'un est rationnel tous sont rationnels puisque les opérations de division et de soustraction effectuées sur des nombres rationnels conduisent à des nombres rationnels.

Si nous considérons les six opérations

$$\begin{array}{ccc} 1 & sd & (sd)^2 \\ d & s & sd s \end{array} \quad (A)$$

où 1 représente comme habituellement l'opération identique (c'est-à-dire une opération qui ne modifie rien), nous pouvons aisément vérifier qu'elles associent, en général, six nombres distincts. Par exemple, si nous effectuons ces six opérations sur le nombre  $n$  nous obtenons

$$\begin{array}{ccc} n & \times & \frac{1}{1-n} & \frac{n-1}{n} \\ \frac{1}{n} & & 1-n & \frac{n}{n-1} \end{array}$$

Un des faits les plus importants n'a pas encore été établi explicitement; à savoir que nous arrivons à la même collec-

tion de nombres en appliquant toutes ces opérations à l'un quelconque des nombres de la collection. Par exemple, si nous partons de 3, les six opérations indiquées conduisent aux nombres suivants, dans l'ordre :  $3, -\frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{1}{3}, -2, \frac{3}{2}$ . En partant de  $-\frac{1}{2}$ , l'ordre est :  $-\frac{1}{2}, \frac{2}{3}, 3, -2, \frac{3}{2}, \frac{1}{3}$ . De la même manière, en partant d'un autre nombre quelconque de cette collection et lui appliquant les six opérations indiquées, on obtiendrait simplement un nouvel arrangement de ces six nombres. Ceci est directement dû au fait que les six opérations dénotées par (A) forment un groupe.

Supposons que ces six opérations soient effectuées dans l'ordre sur  $\sin^2 x$ . Les fonctions obtenues seront :  $\sin^2 x, \sec^2 x, -\cot^2 x, -\operatorname{tg}^2 x, \operatorname{cosec}^2 x, \cos^2 x$ . Par suite, ces six fonctions représentent une collection de nombres sous le groupe (A) pour chaque valeur de  $x$ . On dit que les nombres d'une telle collection sont conjugués sous le groupe représenté par (A). Quoiqu'il soit aisé de présenter des relations beaucoup plus intéressantes, celles-ci ont cependant une valeur spéciale, étant donné qu'elles constituent une partie d'un ensemble très considérable de faits qui s'y rattachent étroitement. En d'autres termes, elles sont un acheminement vers des horizons plus étendus.

Nous avons remarqué que chacun des deux nombres  $\frac{1}{2} \pm \frac{1}{2} \sqrt{-3}$  est transformé en lui-même par les trois premières opérations de (A). Il est facile de vérifier que les trois autres opérations transforment l'un de ces nombres en l'autre. Par suite, chacun de ces nombres n'a que deux conjugués sous le groupe (A). Chacune des deux collections de trois nombres  $(-1, 2, \frac{1}{2}), (1, 0, \infty)$  a trois conjugués sous le groupe (A). Tous les autres nombres ont six conjugués distincts sous le groupe (A). Cette proposition peut être démontrée facilement<sup>1</sup> et renferme évidemment des questions concernant l'égalité des fonctions trigonométriques du paragraphe précédent.

<sup>1</sup> *Quarterly Journal of Mathematics*, vol. 37 (1905), p. 80.



Les opérations de (A) peuvent être placées en correspondance (1, 1) avec les six mouvements qui transforment un triangle équilatéral en lui-même. Celles de la première ligne correspondent aux rotations de  $0^\circ$ ,  $120^\circ$  et  $240^\circ$  respectivement autour du centre du triangle, tandis que les trois dernières correspondent à des rotations de  $180^\circ$  du plan du triangle autour d'axes de symétrie. Comme ces six mouvements et les opérations de (A) obéissent aux mêmes lois de combinaison, on dit qu'ils représentent le même groupe abstrait.

De même que les opérations de soustraire de 1 et diviser 1 conduisent à un groupe de l'ordre six, les opérations de soustraire de 2 ou 3 et diviser 2 ou 3 conduisent à un groupe de l'ordre 8 ou 12 respectivement. Dans le premier cas il y a 10 nombres particuliers qui sont égaux à quelques-uns de leurs conjugués, tandis que dans le dernier cas il y a 14 nombres analogues. Suivant l'un ou l'autre de ces groupes, les autres nombres sont associés en collections de 8 ou 12 respectivement, de telle façon que chaque nombre d'une collection est transformé en chaque autre nombre de la collection au moyen des opérations des groupes respectifs. Pour les détails et démonstrations nous renvoyons à l'auteur mentionné ci-dessus.

Si nous considérons les huit mouvements du plan qui transforment un carré en lui-même, nous verrons facilement qu'ils peuvent être mis en correspondance (1,1) avec les huit opérations obtenues en combinant  $d_2$  et  $s_2$ , où  $d_2$  représente diviser 2 et  $s_2$  représente soustraire de 2. L'opération  $s_2 d_2$  doit être répétée quatre fois pour revenir au nombre primitif, et peut correspondre à une rotation de  $90^\circ$  dans le groupe des mouvements du carré. Le fait que  $s_2 d_2$  est généralement de période quatre est rendu évident par les équations :

$$s_2 d_2 = \frac{2}{2-n}, (s_2 d_2)^2 = \frac{2-n}{1-n}, (s_2 d_2)^3 = \frac{2n-2}{n}, (s_2 d_2)^4 = n.$$

Ce groupe de l'ordre 8 est généralement connu sous le nom de *groupe octique* et se présente lui-même très fréquemment dans les mathématiques élémentaires. Nous avons déjà donné un exemple en arithmétique — soustraire de 2 et

diviser 2 — et un exemple en géométrie élémentaire — les mouvements qui transforment un carré en lui-même. Nous continuons en donnant une application fondamentale de ce groupe en trigonométrie.

Représentant les opérations de prendre le complément et le supplément d'un angle par  $c$  et  $s$  respectivement, il est facile de voir que  $cs$  augmente l'angle de  $90^\circ$ . Par suite  $(cs)^2 = \alpha + 180^\circ$ ,  $(cs)^3 = \alpha + 270^\circ$ ,  $(cs)^4 = \alpha$ , où  $\alpha$  est l'angle considéré. Par conséquent, il est clair que  $cs$  est une opération de période quatre comme  $s_2 d_2$ . En plus, les huit opérations

1	$cs$	$(cs)^2$	$(cs)^3$
$s$	$c$	$csc$	$scs$

forment un groupe qui a exactement les mêmes propriétés que le groupe formé par  $s_2, d_2$ .

Il est spécialement intéressant de remarquer que les huit opérations du groupe octique transforment  $\alpha$  en les huit angles dont on donne généralement les fonctions dans les livres de trigonométrie élémentaire. Ces angles sont dans l'ordre :  $\alpha$ ,  $\alpha + 90^\circ$ ,  $\alpha + 180^\circ$ ,  $\alpha + 270^\circ$ ,  $180^\circ - \alpha$ ,  $90^\circ - \alpha$ ,  $270^\circ - \alpha$ . En vertu de la prédominance de ces angles et des opérations  $c$  et  $s$ , notre trigonométrie élémentaire pourrait être appelée, d'une façon appropriée, la trigonométrie du groupe octique. Quelques-unes des méthodes concernant l'emploi des propriétés du groupe octique dans l'étude des fonctions de ces huit angles ont été données dans l'article intitulé « A new chapter in trigonometry », *Quart. Journal of Mathematics*, vol. 37, (1906), p. 226.

Ces quelques applications du groupe du triangle et du carré dans d'autres sujets élémentaires montrent clairement la relation intéressante entre ces sujets. Ceci est un des traits les plus importants de la notion de groupe. Nous ne voulons pas dire que ces relations doivent être développées dans un enseignement élémentaire, mais le maître qui les connaît enseignera plus sagement et avec un intérêt plus profond que s'il les ignorait. Ce qui est nécessaire à tout maître est une compréhension claire des principes qui trouvent des applications étendues. Des faits isolés sont souvent intéres-

sants, mais ils ne peuvent pas être si fructueux que ceux qui trouvent des applications générales dans des développements plus éloignés. Le vrai pédagogue seul peut être un juge de l'importance relative des éléments qui entrent dans l'ensemble du bagage mathématique.

Les trois polygones réguliers qui entrent pour la plus grande part dans l'étude de la géométrie élémentaire sont : le triangle, le carré et l'hexagone. Nous avons considéré brièvement les groupes des mouvements des deux premiers. Le groupe des mouvements du dernier est de l'ordre 12, et a les mêmes propriétés que le groupe obtenu par les deux opérations de soustraire de 3 et diviser 3. Si ces deux opérations sont représentées par  $s_3$  et  $d_3$  respectivement, il est facile de vérifier que  $s_3 d_3$  est une opération de période six, qui peut correspondre à une rotation de  $60^\circ$ . Les autres opérations du groupe, obtenues par  $s_3$ ,  $d_3$ , correspondent à des rotations autour des axes de symétrie de l'hexagone régulier.

C'est un fait curieux que les groupes des trois polygones réguliers fondamentaux soient les mêmes que les trois groupes finis de soustraction et division, avec des nombres rationnels, si nous excluons le cas presque trivial de soustraire de 0 et diviser 1. Tandis que chacun des autres polygones réguliers possède un groupe de mouvements dont l'ordre est également deux fois le nombre des côtés du polygone, ces groupes, cependant, ne se présentent pas comme groupes de soustraction et division lorsque le nombre dont on soustrait et le nombre qu'on divise sont tous les deux rationnels<sup>1</sup>. En tenant compte de ces faits, les groupes qui ont été considérés sont d'un intérêt plus spécial.

Les principales visées d'un bref article sur un vaste sujet doivent être de susciter un vif intérêt et de donner de bonnes références. Pour ce qui concerne ces dernières, nous voudrions spécialement renvoyer à l'article de POINCARÉ publié dans *The Monist*, vol. 9, (1898), p. 34. Des données semblables sont utilisées déjà en 1874 dans les « Nouveaux Eléments

---

<sup>1</sup> Cf. HILTON, *Messenger of Mathematics*, vol. 35, p. 117, 1905.

de Géométrie » de MÉRAY<sup>1</sup>. Pour de plus brefs développements sur ce point, nous pouvons renvoyer à la définition de la théorie des groupes dans *The Popular Science Monthly*, février 1904, « on the groups of the figures of elementary geometry », *American Mathematical Monthly*, octobre 1903, et aux articles ci-dessus mentionnés.

G.-A. MILLER (Université d'Illinois).

---

## LA NOTION DE GROUPE ET LA THÉORIE DES PARALLÈLES

*Extrait d'un mémoire*<sup>2</sup> de M. C. BOURLET (Paris).

---

Les *Instructions* qui accompagnent les programmes officiels (27 juillet 1905) de l'enseignement de la Géométrie, dans le premier cycle de l'Enseignement Secondaire, recommandent aux professeurs de « faire un appel constant à la notion de mouvement » et de « lier le parallélisme à la notion de translation ». Beaucoup d'entre eux se sont émus de ces Instructions, et à bon droit, en se demandant si dorénavant on enseignerait dans nos lycées *deux* Géométries : l'une, au premier cycle, où les parallèles seraient définies par la translation ; l'autre, au second cycle, où l'on conserverait l'ancienne méthode.

La question qui se pose est alors de savoir si l'on ne pourrait pas, en définissant les parallèles par la translation, construire une Géométrie aussi rigoureuse que celle que l'on enseigne actuellement et qui puisse être conservée d'un bout à

---

<sup>1</sup> Voir l'analyse qu'en donne Bourlet dans les *Nouvelles Annales*, année 1904. p. 211-219. (Réd.)

<sup>2</sup> Sous le titre de théorie des parallèles basée sur la translation rectiligne, M. Bourlet vient de publier dans les *Nouv. Annales* (Nov. 1906), un important mémoire que nous signalons à tous ceux qui enseignent la Géométrie élémentaire. Nous en reproduisons ici la préface.