Mertens : Diff.- und Integralrechnung, 5 ; Uebg. hierzu, g. Uebgn. im math. Seminar, 2 ; Uebg. im math. Proseminar, g. — Wirtinger : Elliptische Funktionen, 5 ; Mathem. Statistik, 3 ; Mathem. Seminar ; Mathemat. Proseminar. — Kohn : Synthetische Geometrie, 4 ; Uebg. ; Differentialgeometrie I., 2. — Tauber : Versicherungsmathematik, 4 ; Invaliditätsversicherung, 2. — Blaschke : Einführung in die mathemat. Statistik, II. Teil, 3. — Plemely : Funktionentheorie, 3. — Hahn : Theorie der Funktionen einer reellen Veränderlichen, 3. — Hanni : Unendliche Doppelreihen und deren Verwendung in der Funktionentheorie, 2. — Weiss : Praktische Astronomie, 4. — Hepperger : Astrophysik, 3 ; Ueber Doppelsterne, 2. — Schram : Ueber die Zeitrechnung der Inder, 1. — Herz : Die Elemente der darstellenden Geometrie und deren Anwendung auf das Kartenzeichnen, 4. — Prey : Die Schwereverteilung auf der Erde, 1.

BIBLIOGRAPHIE

H. Andoyer. — **Cours d'Astronomie.** Première partie : Astronomie théorique. — 1 vol. in-8, autographié 221 p. ; 9 fr. ; Librairie Hermann, Paris.

M. Andoyer a réuni dans ce volume les notions fondamentales *d'Astronomie théorique* qu'il présente habituellement à ses étudiants de la Sorbonne. Tous ceux qui abordent l'étude de l'Astronomie trouveront dans son ouvrage un exposé à la fois clair, élégant et concis qui ne fera qu'augmenter leur intérêt pour l'Astronomie. Ils ne regretteront qu'une chose : c'est que le volume ne soit pas imprimé.

Voici la liste des matières traitées dans ce volume : Trigonométrie sphérique. — La Terre. — Coordonnées astronomiques ; Temps. — Changement de coordonnées. — Mouvement diurne. — Réfraction astronomique. — Parallaxe. — Aberration. — Notion de Mécanique céleste. — Précession et nutation. — Positions apparentes des astres. — Mouvement du soleil. Temps. — Mouvement géocentrique des planètes. — Mouvement de la lune et des satellites. — Eclipses.

J. Boussinesq. — **Théorie analytique de la chaleur** mise en harmonie avec la thermodynamique et avec la théorie mécanique de la lumière. Tome II : Refroidissement et échauffement par rayonnement ; conductibilité des tiges, lames et masses cristallines ; courants de convection ; théorie mécanique de la lumière. — Un vol. gr. in-8°, XXXII, 625 p. ; Gauthier-Villars, Paris, 1903.

L'analyse, bien incomplète, du premier volume de l'ouvrage de M. Boussinesq a occupé quelques pages du numéro de juillet 1903 de l'*Enseignement*. Si nous voulions à présent donner une faible idée de la beauté du second volume et résumer seulement les questions nouvelles et importantes traitées par l'illustre auteur, il nous faudrait un espace bien plus grand encore ; car ce volume ne contient pas seulement l'étude des problèmes particuliers de la théorie de la chaleur, mais aussi un exposé à peu près complet d'une théorie mécanique de la lumière, entièrement originale et propre à l'auteur. Nous avons donc deux traités de Physique mathématique où l'auteur développe, en grande partie, des théories qui lui appartiennent et qui s'éloignent des théories déjà reçues. Elles mériteraient par conséquent une longue et minutieuse analyse, incompatible avec les notices, nécessairement courtes, que doit donner cette revue d'Enseignement. Aussi nous bornerons nous à faire connaître seulement les points essentiels de cette œuvre magistrale.

Nous avons déjà dit que dans le premier volume M. Boussinesq à déduites les équations fondamentales de la théorie, et, sauf les applications à l'armille, au refroidissement de la sphère, il n'a traité que des problèmes généraux.

Le nouveau volume débute par des problèmes particuliers.

Il y a une différence entre les deux modes de refroidissement ou d'échauffement des corps par contact ou par rayonnement. En effet, si les deux problèmes sont régis par une même équation indéfinie, qu'il s'agit d'un état calorifique variable avec le temps ou d'un état permanent; les conditions à la surface sont au contraire très différentes. L'auteur examine avant tout des cas où l'on peut réduire le problème du rayonnement à celui plus facile du contact, et il fait l'application de ces considérations générales à cinq problèmes particuliers. (Leçons XXI à XXVI.) Le premier est celui du refroidissement par rayonnement d'un mur d'épaisseur indéfinie. L'auteur à l'aide d'une élégante application de l'intégrale de Fourier démontre la formule qu'avait donné Fourier et il en fait une intéressante application, toujours suivant Fourier, au refroidissement du globe. Les trois autres problèmes sont : celui de la dissipation de la chaleur en tous sens ; celui de l'échauffement, par rayonnement, et celui de l'échauffement permanent mais inégal, par le rayonnement de sources extérieures constantes (problème de Poisson) pour le cas d'un mur. Vient enfin le problème de l'échauffement permanent d'une sphère par rayonnement; on le réduit aisément au problème intérieur de Dirichlet lorsqu'on connaît sur la surface une relation linéaire entre les valeurs de la fonction et ceux de la dérivée normale. L'auteur en déduit en particulier la solution du second problème de Dirichlet sans la détermination préalable de la seconde fonction de Green.

Après la solution et la discussion savante de ces problèmes, où, comme toujours, l'auteur « ne fait intervenir l'analyse que dans la mesure où elle « semble nécessaire pour fixer l'intuition et arriver aux résultats numé- « riques », on revient encore à la théorie générale; c'est-à-dire à l'échauffement d'un corps homogène non isotrope, ou d'une plaque de faible épaisseur à faces parallèles ou d'une barre mince cylindrique, par une source calorifique de débit donné et n'occupant qu'une région très petite à l'intérieur du corps. Les expériences classiques de Senarmont sur la conductibilité des cristaux ont inspiré à la moitié du dernier siècle les recherches de Duhamel sur les corps à contexture symétrique. En 1867 l'auteur dans sa thèse de doctorat considéra le cas général; son analyse simplifiée fait l'objet des nouvelles leçons. En laissant de côté le cas d'un corps massif pourvu de sources calorifiques arbitrairement distribuées dans son intérieur, l'auteur cherche l'équation indéfinie régissant les températures moyennes le long d'une petite droite de la plaque, taillée suivant une orientation quelconque à l'intérieur d'un corps homogène. Cette équation, qui est aussi trouvée pour le cas d'une barre, contient les grandeurs des deux conductibilités principales; et l'auteur donne un moyen simple pour leur détermination, car il prouve que l'ellipse figurative des conductibilités principales de la plaque est l'intersection d'un ellipsoïde fixe avec le feuillet moyen de la plaque.

Par une simple transformation homographique le problème de l'échauffement, dans les trois cas, est réduit au même problème pour un corps isotrope et l'intégration est faite dans quelques cas particuliers. Celui d'un état permanent est surtout intéressant; car l'équation indéfinie du problème, aux dérivées ordinaires, est du second ordre à coefficients constants dans les cas d'un corps massif ou d'une barre et, par conséquent, immédiatement intégrable. Dans le cas d'une plaque l'intégration se fait par la fonction J_0 de Bessel; mais la détermination du rapport des deux constantes, afin que la solution soit finie à l'origine, est un problème assez difficile qui s'est présenté à Stokes dans ses recherches sur la résistance de l'air au mouvement d'un pendule. M. Boussinesq donne une remarquable simplification de la démonstration de Stokes.

Dans les trois dernières leçons l'auteur considère les phénomènes où coexistent des mouvements visibles de déformation ou de vibration et le mouvement calorifique. Plus particulièrement, l'auteur cherche avant tout l'équation indéfinie de la température pour un fluide en mouvement et à l'état élastique, en employant les principes de la thermodynamique; c'est l'équation déjà trouvée par Fourier et, sous sa forme définitive et simplifiée, par Poisson. Pour ce qui regarde un milieu élastique déformé ou vibrant l'auteur démontre que l'équation indéfinie des températures est très sensiblement la même que si ses particules restaient immobiles dans leurs situations primitives ou moyennes d'équilibre. Enfin, les problèmes plus difficiles de la *convection calorifique,* c'est-à-dire des phénomènes produits autour d'un corps chaud immergé dans un fluide par des couches fluides avoisinantes, sont abordés dans deux cas extrêmes; car la question en général est presque toujours rebelle à l'intégration. Le premier est celui des courants de convection au sein d'une masse fluide en repos; bien que les intégrations ne semblent pas possibles, certaines lois de proportionnalité ou de similitude que l'auteur déduit des équations différentielles, donnent raison des lois de Dulong et Petit sur le pouvoir refroidissant des gaz. Le second cas, un peu plus simple, est celui où un corps chaud a sa chaleur emportée d'une manière permanente par un courant fluide rectiligne et uniforme indéfini en tous sens au sein duquel il est immergé. L'intégration est possible dans le cas où le corps a la forme d'un mince plateau limité d'un côté par un bord, indéfini suivant les autres sens et parallèles au courant. L'extension des mêmes lois approchées au cas de tout corps à courbures modérées, montre un pouvoir refroidissant en raison directe de la racine carrée de la vitesse générale du courant. Les résultats théoriques ont été confirmés par l'expérience.

Après avoir ainsi achevé la théorie analytique de la chaleur, deux mémoires assez longs et déjà annoncés par l'auteur, occupent la plus grande partie du volume.

Nous avons dit ailleurs que dans la quatrième leçon M. Boussinesq a considéré la résistance que les molécules des corps, regardées comme fixes, opposent aux vibrations de l'éther animé par une série d'ondes; de là la nécessité de considérer, en général, la résistance opposée aux petits mouvements d'un fluide indéfini par un solide immergé dans ce fluide. C'est l'objet de la première note.

En 1786 les expériences de Du Buat (*Principes d'Hydraulique,* tome II) avaient montré que la masse d'un corps en mouvement dans un milieu résistant est plus grande que celle à l'état de repos; c'est-à-dire que le corps retient une partie du fluide adhérent à la manière d'une *poupe* et d'une *proue* fluides. Les travaux de Bessel (*Astron. Nachrich.* 1828), de Baily (*Phil. Trans.* 1832) confirmèrent ceux de Du Buat; Poisson (*Mém. de l'Acad. des Sciences,* t. XI), Green démontrèrent théoriquement quelques-uns des résultats de Du Buat.

La théorie entière fut approfondie par Stokes qui a écrit un long et classique mémoire (*Mathem. and physic. Papers,* Vol. 3). M. Boussinesq a repris de nouveau toute l'analyse et il a encore obtenu quelques résultats nouveaux par une voie simple et nouvelle.

Quelques considérations élémentaires d'hydrodynamique permettent avant tout d'obtenir les équations indéfinies et à la surface pour la pression du fluide, sans frottements, et l'expression générale de l'impulsion exercée sur le solide immergé par le fluide ambiant. Cette impulsion a un potentiel de second degré par rapport aux accélérations relatives; on a donc à considérer seulement six coefficients de résistance (*terne tensorielle* suivant l'expression de M. Voigt), et il en résulte un système d'axes principaux pour tout solide immergé. Le calcul de ces coefficients peut se faire dans quelques cas particuliers; par exemple si le corps est une sphère, un cylindre de longueur indéfinie animé de translations connues normaux à son axe; un ellipsoïde et en particulier un disque ou une aiguille. Ces recherches occupent les deux premières parties du mémoire.

Les deux autres mettent en compte les frottements intérieurs du fluide en partant des équations de Navier. Le système d'équations indéfinies et à la surface auquel arrive l'auteur n'est pas de ceux dont on peut démontrer, en général, l'univocité de la solution. M. Boussinesq par un artifice, dont il a fait plusieurs applications dans le second mémoire, prouve cette univocité en faisant des hypothèses très générales. L'application à la sphère, la seule où l'intégration soit possible, dans le cas d'un mouvement pendulaire fait trouver une formule de Stokes. L'auteur enfin envisage la résistance du cylindre circulaire dans les deux cas d'une vitesse constante et d'un mouvement pendulaire. On trouve, dans ce dernier cas, que la résistance se compose de deux parties dont l'une est proportionnelle à la vitesse, l'autre à l'accélération du fluide.

La deuxième note, qui est divisée en neuf parties, occupe à elle seule plus que la moitié du volume; elle développe la théorie des ondes lumineuses contenue en germe dans les troisième et quatrième leçons. C'est un véritable traité sur la théorie mécanique de la lumière; malheureusement nous sommes forcés d'en dire peu de choses.

Tous ceux qui connaissent les belles leçons de Verdet sur l'optique physique (tome V et VI de ses *Œuvres* — voir aussi la traduction allemande de Exner) auront une idée bien claire du développement historique des nombreuses théories formulées pour les divers chapitres de l'optique, ayant pour base le principe des ondulations, et des difficultés que l'on y rencontre encore. Kirchhoff, par sa découverte de la formule analytique du principe de Huygens, a réussi à exposer d'une manière originale et uniforme la partie générale de l'optique. Les difficultés, bien graves, interviennent lorsqu'on a à considérer les mouvements de l'éther dans un milieu ou isotrope ou birifringent. Il suffit de se rappeler les hypothèses de Helmholtz pour l'explication de la dispersion anomale; la recherche encore imparfaite des conditions à la surface dans la théorie de la réflexion et de la réfraction; etc.

Les idées de Boussinesq sur cette partie de la Physique mathématique datent de 1867 ; bien qu'elles aient été acceptées par de Saint-Venant et par plusieurs savants, surtout en Allemagne, elles n'ont pas eu la diffusion qu'elles méritaient. L'auteur est revenu bien tard sur ces idées ; leur développement, mis en harmonie avec ces dernières découvertes, est l'objet de cette seconde note.

L'idée maîtresse de l'auteur est l'*identité réelle* de l'éther des corps à l'éther du vide et l'*accroissement* apparent de sa densité par la résistance des molécules des corps. Les lois trouvées dans la première note assurent alors que les résistances totales, suivant les axes, opposées par la molécule à l'éther sont des fonctions linéaires des composantes de l'accélération avec six coefficients, comme pour un fluide. Des formules relatives à une molécule on trouve simplement, par voie de sommation, les trois composantes de la résistance totale opposée par la matière pondérable au mouvement de l'unité de volume de l'éther; alors la théorie classique de l'élasticité permet d'écrire aussitôt les trois équations approchées aux dérivées partielles régissant le mouvement vibratoire lumineux. Ces trois équations expriment que si ξ, η, ζ sont les trois composantes du déplacement, θ la dilatation cubique,

$$\mu\left(\Delta_2 \xi - \frac{\partial \theta}{\partial x}\right),$$

etc. sont des fonctions linéaires, avec six coefficients distincts, des dérivées secondes de ξ, η, ζ, par rapport au temps. Ces équations, que nous nommerons équations fondamentales, sont la base de toute la théorie mécanique.

Pour vérifier si elles suffisent à l'explication des faits, l'auteur cherche avant tout de fixer les idées sur la constitution d'un pinceau de lumière dans un milieu quelconque, en étudiant, dans toute étendue restreinte, la propagation par ondes planes dans le cas des vibrations polarisées rectilignement. Voici les résultats de l'analyse de l'auteur, en s'arrêtant à une première approximation 1. Les vibrations ne sont pas transversales (comprises dans les plans des ondes). 2. La relation entre la direction des ondes et leur vitesse de propagation est la même que dans la théorie de Fresnel. 3. L'orientation de la vibration de Boussinesq et de celle de Fresnel (rigoureusement transversale) sont dans un même plan mené suivant la normale à l'onde. 4. La surface d'onde est la même que dans la théorie de Fresnel. 5. La direction des vibrations est normale au rayon.

Dans une seconde approximation, l'auteur tient compte de la lente variation des déplacements aux divers points d'une même onde, en augmentant les déplacements de petites fonctions. Alors, d'une manière toute différente que celle suivie par Kirchhoff, on peut réussir à la définition d'un rayon lumineux ; on peut prouver en effet que le sens suivant lequel le mouvement de l'onde plane se propage sans variation sensible est le sens même du rayon aboutissant au point de contact de cette onde avec l'enveloppe de toutes celles qui seraient parties en même temps qu'elle de l'origine, mais dans d'autres directions. De manière que, suivant l'auteur, « l'hypothèse des vibrations rectilignes inévitable et féconde à une première approximation doit être laissée de côté à une approximation plus haute ». Cette théorie de M. Boussinesq est très profonde ; mais elle lui fait défaut, il faut le reconnaître, toute l'élégance de la théorie de Kirchhoff (*Mathem. Optik* — 12, 13 Vorles) ; mais cela est toujours inévitable lorsqu'on pousse au loin les approximations.

Après avoir reconnu que ses équations paraissent propres à représenter la propagation de la lumière dans un corps homogène, l'auteur veut voir si elles réussiront aussi bien à exprimer ce qui se passe à la surface de séparation de deux corps homogènes distincts. C'est, comme on le voit, le problème de la réflexion ou de la réfraction (3me partie). Il est bien connu que toute la difficulté de la théorie consiste dans la recherche des conditions à la surface séparative. L'hypothèse, commune aux autres problèmes de l'élasticité, de l'égalité des pressions supportées par les deux faces de la couche de transition n'est plus vraie. L'auteur se rapproche ici aux idées de Cauchy, et il démontre que sur la surface de séparation la rotation moyenne des particules (condition de Cauchy) et leur déplacement tangentiel (condition de Fresnel) sont les mêmes par la grandeur et la direction, dans deux milieux contigus, en tous les points de leur surface limite. Ces quatre conditions définies, ne sont au fond qu'une simplification des équations indéfinies des mouvements vibratoires de l'éther, considérées à l'intérieur des couches de transition. Ces conditions et les équations indéfinies fondamentales suffisent pour trouver les lois de Fresnel pour la réflexion et réfraction vitreuse ; pour expliquer, en suivant M. Potier, les particularités qu'elle présente aux environs de l'angle de polarisation ; pour la réflexion cristalline, métallique, etc.

L'auteur applique sa théorie à l'explication simple de l'entraînement des ondes, et à la généralisation de quelques-unes des propriétés précédentes aux milieux non symétriques.

Ayant achevé l'étude des phénomènes lumineux dans une première approximation, l'auteur passe à étudier des particularités plus délicates, et en première ligne il considère le phénomène de la dispersion. Sa théorie, on le sait, a été acceptée et en partie modifiée par Sellmeier et par Helmholtz.

L'ensemble des molécules pondérables exerce des actions, à des distances relativement grandes, sur l'unité de masse d'une particule d'éther. Ces actions admettent un potentiel de second degré par rapport aux composantes de déplacement. Alors, dans le cas d'une lumière simple ou d'un mouvement pendulaire, rien ne sera changé aux lois du mouvement ; mais les divers coefficients spécifiques exprimant les propriétés d'un même corps varieront un peu et, en général, inégalement avec la période ou la longueur d'onde. L'étude de la dispersion dans les corps en repos ou en mouvement, au moyen des équations fondamentales, conduit tout de suite à la formule de Cauchy. La participation sensible de la matière pondérable au mouvement est ensuite la base de l'explication de la dispersion anomale, surtout au voisinage des raies d'absorption. La résistance spéciale de certaines molécules donne l'explication de la polarisation rotatoire, etc. Mais nous ne pouvons pas nous arrêter à toutes les particularités de cet immense ouvrage ; nous n'insistons guère sur les septième et huitième parties qui traitent de la propagation d'un pinceau de lumière dans un milieu hétérogène, du principe de Fermat, de la double réfraction elliptique, de la polarisation rotatoire magnétique, etc.

La transmission des mouvements non pendulaires dans les cas les plus simples de non homogénéité de leurs équations différentielles est l'objet de la neuvième et dernière partie de ce long traité. Les déplacements, dans le cas de propagation de mouvement dans l'éther d'un corps homogène et isotrope-symétrique, absorbant ou dispersif des longues radiations, dans l'hypothèse que la dilatation cubique soit nulle, satisfont à trois équations de même forme qu'on peut réduire à deux formes seulement, exprimant que Δ_2 de la fonction inconnue est une fonction linéaire de la même fonction et de la dérivée seconde par rapport au temps ; ou bien une fonction linéaire de sa dérivée première et seconde. Initialement on donne la valeur de la fonction et de sa dérivée en tout point du corps. L'auteur fait une étude approfondie de ces équations, dont il démontre l'univocité de la solution par une méthode simple et originale ; et il en tire les conséquences les plus intéressantes ; par exemple la propagation uniforme du front de l'onde, le calcul (Hugoniot) de la vitesse de propagation, etc.

Le mémoire contient encore une dixième partie où l'auteur a réuni une foule de complèments sur divers points de la théorie qu'il a exposée.

M. Boussinesq dans la préface au volume dont nous avons cherché de faire ressortir l'importance et l'originalité, observe, très justement, que « les questions y sont présentées autant que possible d'une manière concrète, à la fois géométrique et physique ». C'est cela précisément, comme nous avons déjà écrit, un des traits les plus caractéristiques de cette œuvre profonde, qui est digne du pays qui a vu naître les œuvres de Fourier et de Poisson.

R. MARCOLONGO (Messine).

E. CZUBER. — **Vorlesungen über Differential- u. Integralrechnung.** II, mit 87 Fig. ; zweite, sorgfältig durchsehene Auflage. — 1 vol. relié, in-8° 532 p. ; 12 M. ; B. G. Teubner, Leipzig.

La première édition des LEÇONS de Calcul différentiel et intégral a eu un succès qui ne peut surprendre ceux qui connaissent le talent d'exposition de l'auteur et le soin qu'il apporte à ses ouvrages.

Elles constituent un excellent cours accompagné de nombreux exemples et problèmes dans lesquels il est tenu compte des besoins des mathématiques appliquées à la mécanique et à la physique.

Rappelons que le tome II comprend les bases du calcul intégral, les propriétés et les applications des intégrales indéfinies, des intégrales définies, des équations différentielles et du calcul des variations.

E. DESPORTES. — **Eléments de Géométrie descriptive,** nouvelle édition entièrement refondue, conforme aux programmes officiels du 27 juillet 1905 ; classe de première C et D, et de mathématiques A, B. — 1 vol. gr. in-8°, 332 p. ; 4 fr. ; Arm. Colin, Paris.

On sait que les nouveaux programmes français sont caractérisés par l'importance justement rendue à la *Géométrie cotée* ; il est prescrit de commencer l'étude de la Géométrie descriptive par celle des projections cotées. L'auteur a adopté cette marche, et il consacre d'abord un premier chapitre à la Géométrie cotée en ayant constamment recours au calcul numérique.

Un cours élémentaire de Géométrie descriptive doit nécessairement se rattacher directement à la Géométrie de l espace. L'auteur en tient compte le plus possible en donnant pour chaque problème élémentaire, une méthode générale de solution fondée sur la conservation directe des figures de l'espace. C'est là un principe qu'on ne saurait assez inculquer aux élèves afin de *les habituer à voir et à chercher dans l'espace*.

Pour donner une idée de l'étendue des matières traitées à ceux qui ne connaissent pas les programmes français, nous ajouterons que l'ouvrage comprend l'ensemble des éléments de Géométrie descriptive concernant la droite, le plan, les prismes et les pyramides, les sections planes et les développements des polyèdres et des surfaces courbes, la sphère et les problèmes concernant les ombres.