Applications.

Objekttyp: **Chapter**

Zeitschrift: **L'Enseignement Mathématique**

Band (Jahr): **9 (1907)**

Heft 1: **L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE**

PDF erstellt am: **13.09.2024**

minée à chaque point de la trajectoire. Si nous excluons donc les trajectoires ayant des points *singuliers à plusieurs rayons de courbure ou tangentes*, pour toutes les autres nous aurons pour l'intensité F une succession de valeurs continue et bien déterminée et le théorème suivant :

THÉORÈME. « *L'intensité d'une force centrale est un invariant relatif à toute trajectoire du mobile n'ayant aucun point singulier à plusieurs rayons de courbure*[1] *ou bien plusieurs tangentes.* »

L'existence de points de la trajectoire, où la force F devient infinie ne gêne pas ; il suffit que l'intensité de la force y soit *toujours* infinie.

L'importance de ce théorème consiste en ce que j'ai en vue des problèmes où la force est donnée comme fonction des coordonnées x et y et, par conséquent, la connaissance de cet invariant nous donne des renseignements quelquefois précieux sur la trajectoire inconnue. Ainsi, si l'intensité de la force n'est pas un invariant par rapport à une trajectoire, cette trajectoire, doit avoir des points singuliers à plusieurs rayons de courbure ou tangentes. *Les points de la trajectoire, où l'intensité de la force prend plusieurs valeurs pendant le mouvement supposé périodique, coïncident avec les points singuliers à plusieurs rayons de courbure ou tangentes.* Des tels points singuliers sont, par exemple, les points multiples à tangentes distinctes ou non. La même formule (7) montre que le sens de la force est aussi un invariant relatif à la trajectoire, puisque le signe du second membre de (7) ne change pas d'après nos hypothèses.

APPLICATIONS.

9. — Pour comprendre l'intérêt de la théorie exposée dans les chapitres précédents, nous citerons quelques applications se rapportant aux problèmes où la force est donnée par une fonction multiforme des x et y et nous nous propo-

---

[1] La formule (7) montre, en effet, que la force F ne saurait avoir plusieurs valeurs qu'aux points singuliers de la trajectoire, où il en est ainsi du rayon ρ ou de la quantité P. Nous ne parlons pas de la direction de la force, parce que elle reste évidemment invariable.

serons d'étudier les diverses trajectoires tracées par un mobile sollicité par cette force. Supposons que l'on ait :

$$F = m \, . \, \omega\,(x\,,\,y)\,[1]$$

(m désigne la masse), F désignant l'intensité de la force, et que la fonction ω (x, y) admette un point singulier $x = a$ et $y = b$ tel que, lorsque le point M (x y) part d'une position initiale et y revient après avoir tourné autour du point M, la fonction change de valeur ; dans cette hypothèse, la courbe ainsi suivie par le point M (x y) ne saurait jamais être une trajectoire du mobile sollicité par la force F ; c'est une conséquence immédiate de notre théorème du paragraphe précédent.

Prenons l'exemple suivant :

$$F = re^{\theta} \, .$$

Lorsque le point M (r, θ), partant d'une position quelconque M (r, θ), y revient après avoir décrit une courbe quelconque renfermant le pôle (origine des coordonnées), la fonction re^{θ} ne reprend pas la même valeur et se multiplie par $e^{2\pi}$; pour cette raison, grâce à notre théorème, aucune trajectoire d'un mobile sollicité par la force $F = re^{\theta}$ ne saurait renfermer le pôle (origine des coordonnées).

D'une façon plus générale, si l'intensité de la force F est donnée par une fonction P (r, θ) n'ayant pas par rapport à la variable θ la période 2π, alors l'équation :

$$P\,(r\,,\,\theta + 2\pi) = P\,(r\,,\,\theta)$$

ne sera pas satisfaite identiquement. Cela posé, l'application de notre théorème nous permet de conclure que les trajectoires d'un point matériel sollicité par cette force ne sauraient jamais renfermer le pôle ($r = 0$). Il n'y a que les trajectoires ayant des points singuliers à plusieurs rayons de courbure [2] que nous devons exclure dans cette conclusion ; nous devons même remarquer qu'en ces points singuliers

---

[1] La fonction ω (x, y) détermine non seulement l'intensité mais encore le sens de la force centrale.

[2] Ou bien à plusieurs tangentes.

les trajectoires exceptionnelles doivent, en général, avoir une infinité de rayons de courbure ou de tangentes parce que la fonction P (r, θ) quand elle n'est pas périodique en θ, admet une infinité de déterminations. Il en résulte que, dans le cas général, les trajectoires exceptionnelles présentant des singularités très compliquées doivent être considérées comme très rares. Elles doivent présenter des points multiples où se croisent une infinité de branches ; à chaque branche correspond une valeur du rayon de courbure ρ et à chaque tangente correspond une valeur de la quantité P ; aussi, à deux valeurs différentes de p correspondent deux tangentes différentes et à deux valeurs différentes de ρ correspondent, en général, deux branches différentes. Si le point multiple est à tangentes distinctes, il devient critique pour l'intensité F de la force à cause de la multiplicité du rayon ρ et de la distance P simultanément; dans le cas contraire, ce n'est que le rayon de courbure ρ qui a plusieurs valeurs, en général, et rend le point critique pour l'intensité de la force F.

10. Les applications de notre théorème deviennent particulièrement intéressantes dans le cas où nous ne pouvons pas effectuer l'intégration de l'équation différentielle.

$$F = -mK^2u^2\left(u + \frac{d^2u}{d\theta^2}\right), \tag{8}$$

et déterminer les trajectoires du mobile, lorsque la force F est donnée comme fonction des coordonnées polaires r et θ.

Si nous tenons compte d'un théorème classique cité plus haut, nous remarquons que ce sont les points singuliers des dérivées partielles,

$$\frac{\partial\omega}{\partial x}, \quad \frac{\partial\omega}{\partial y} \quad \text{ou bien} \quad \frac{\partial P}{\partial \rho}, \quad \frac{\partial P}{\partial \theta},$$

qui nous intéressent au point de vue des invariants de ce travail, puisque ce ne sont que ces points qui entraînent la permutation des diverses branches des fonctions $\omega(x, y)$ et P (r, θ) lorsqu'on tourne autour d'eux. Nous savons, en effet, que l'intégrale

$$\int \frac{\partial\omega}{\partial x}\,dx + \frac{\partial\omega}{\partial y}\,dy$$

le long d'une courbe fermée est nulle, si à l'intérieur de la courbe les dérivées $\frac{\partial \omega}{\partial x}$ et $\frac{\partial \omega}{\partial y}$ sont continues, finies et bien déterminées.

Dans l'exemple examiné plus haut où

$$F = re^{\theta}$$

le pôle, qui ne doit pas être renfermé par les trajectoires, est, en effet, un point singulier de la dérivée $\frac{\partial F}{\partial \theta} = re^{\theta}$, dont les déterminations coïncident en ce point.

Nous ne voulons pas nous étendre davantage, dans ce travail, sur les applications de notre invariant à la théorie des forces centrales, nous nous bornerons seulement à examiner le cas, où la force F est donnée par une fonction $f(z)$ analytique en $z = x + iy$.

Si nous posons :

$$f(z) = R(x, y) + i\Phi(x, y),$$

la seule trajectoire possible est celle qui est définie par l'équation $\Phi(x, y) = 0$.

Il est vrai que nous pouvons immédiatement constater par l'équation différentielle (8) si cette courbe est effectivement une trajectoire, mais il est quelque fois possible d'éviter cette preuve par l'application de notre invariant. Pour nous en rendre bien compte, laissons toute généralité, et prenons un exemple particulier, soit :

$$F = -i \log z = \theta - i \log r,$$

r et θ désignant les coordonnées polaires, et remarquons que la seule trajectoire possible est une circonférence de cercle ayant son centre au pôle ($r = 0$) et son rayon égal à l'unité. L'application de notre théorie nous permet de voir immédiatement que cette courbe n'est pas du tout une trajectoire effective, parce que cette courbe ne passant par aucun point singulier (n'ayant aucune singularité géométrique) renferme un seul point critique transcendant de la fonction analytique $-i \log z$, le point $z = 0$; lorsque le point mobile tourne une fois autour de l'origine des coordonnées, la fonction $-i \log z$ augmente de 2π et, par conséquent, la force ne serait pas un invariant par rapport à la trajectoire n'ayant aucune singularité géométrique. *Il est donc impossible qu'un mobile soit sollicité par une force centrale, dont l'intensité est donnée par la fonction — $i \log z$.*

On pourrait aussi se poser la question suivante : Est-il possible que les composantes X et Y d'une force centrale soient données par des fonctions harmoniques conjuguées de façon que $X + iY$ soit une fonction analytique en $z = x + iy$?

Supposons qu'il en soit ainsi et appliquons l'égalité $\frac{X}{x} = \frac{Y}{y}$ qui caractérise les forces centrales ayant comme centre l'origine des coordonnées.

Nous aurons :

$$X + iY = X + i\frac{y}{x}X = X\left(1 + i\frac{y}{x}\right) = \frac{X}{x}(x + iy) = \frac{X}{x}z\,,$$

$$\text{et}\ \frac{X + iY}{z} = \frac{X}{x}\,.$$

Si donc $X + iY$ est une fonction analytique de z, il en sera de même du premier et du second membre de cette égalité, ce qui n'est possible que dans le cas où la fonction réelle $\frac{X}{x}$ est une constante C. On doit donc avoir :

$$X = Cx \quad \text{et} \quad Y = Cy\,,$$

c'est-à-dire chacune des composantes X et Y doit être proportionnelle à la coordonnée correspondante et l'on aura

$$F = \sqrt{X^2 + Y^2} = Cr\,.$$

C'est là un cas où tous les éléments de la force ne dépendent que de la position du mobile et dans lequel la théorie des invariants n'a pas à intervenir.

C'est la raison pour laquelle le cas, où $X + iY$ est une fonction analytique de $z = x + iy$, n'intéresse pas les forces centrales au point de vue de nos invariants.

Il n'est pas douteux qu'il y ait encore beaucoup de choses à faire dans l'étude du rôle que les fonctions multiformes jouent dans la Dynamique ; c'est là un domaine où des théories importantes de l'analyse moderne trouvent des applications intéressantes.

Georges Rémoundos (Athènes).

CHANGEMENT DE VARIABLE DANS UNE INTÉGRALE MULTIPLE

Les démonstrations ordinaires pour l'opération bien connue du changement de variable dans une intégrale multiple sont non seulement artificielles, mais aussi difficiles à comprendre pour des étudiants qui n'ont pas une grande expérience des démonstrations de ce genre.

La démonstration de M. Goursat pour 2 variables, donnée dans son *Cours d'Analyse* n'est pas artificielle et est suffisamment simple, mais elle emploie la formule de Green.

Dans l'édition de 1893 du *Cours d'Analyse* de M. Jordan, § 148 T. 1, il y a un aperçu d'une démonstration ingénieuse que l'on rend facilement parfaitement rigoureuse et qui peut être appliquée au cas d'un nombre quelconque de variables.

L'énoncé rigoureux de cette démonstration est :

Etant donné l'intégrale $\iint\limits_{A} f(x, y)\, da$.

Admettons que

$$\left.\begin{aligned} X &= X(u, v) \\ Y &= Y(u, v) \end{aligned}\right\} \quad (1)$$

sont des fonctions, continues de (u, v) dans toute une région $\overline{A}$ (limites comprises) et, telles qu'à chaque point (u, v) de $\overline{A}$ corresponde un point et un seul (x, y) de A.