

Zeitschrift: L'Enseignement Mathématique
Band: 9 (1907)
Heft: 1: L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE

Artikel: LE LEMME FONDAMENTAL DE LA THÉORIE DES NOMBRES
Kapitel: Exercices.
Autor: Aubry, A.
DOI: <https://doi.org/10.5169/seals-10154>

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. [Siehe Rechtliche Hinweise.](#)

Conditions d'utilisation

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. [Voir Informations légales.](#)

Terms of use

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. [See Legal notice.](#)

Download PDF: 15.10.2024

ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, <https://www.e-periodica.ch>

division par b seront les nombres α, α', \dots ; de là, en multipliant, la congruence

$$\Pi^{\varphi(b)-1} \equiv \Pi, \quad \text{d'où} \quad \Pi^{\varphi(b)} \equiv \Pi^2 \pmod{b}$$

Autre démonstration. Joignons, de α en α , les sommets d'un polygone P , de b côtés, et, de x en x , ceux du deuxième polygone P' ainsi obtenu, x étant choisi tel que le troisième polygone coïncide avec le premier P . On a ainsi pris les sommets de αx en αx , ce qui produit le même résultat que si on les avait pris de 1 en 1. Ainsi si α est premier avec b , il y aura toujours un nombre x tel que $\alpha x \equiv 1 \pmod{b}$ ¹.

Si $x = \alpha$, et qu'on prenne les sommets de P' de $b - \alpha$ en $b - \alpha$, on retombera sur le polygone P renversé ; donc $\alpha(b - \alpha)$ revient à -1 ou bien $\alpha(b - \alpha) \equiv -1 \pmod{b}$.

Ainsi, dans tous les cas, les nombres $1, \alpha, \alpha', \dots, b - 1$ peuvent s'associer de manière que leur produit soit de la forme $\pm 1 \pmod{b}$: on peut donc écrire

$$\Pi \equiv \pm 1 \pmod{b}.$$

selon que le nombre des produits de la forme $-1 \pmod{b}$, est pair ou impair².

EXERCICES.

1. La somme des quotients provenant de la division par b des nombres $a, 2a, 3a, \dots, (b - 1)a$, est égale à $\frac{1}{2}(a - 1)(b - 1)$. (Gauss).

¹ De là, une solution graphique de la congruence $\alpha x - by = 1$. (Poinsoy).

² Si b est un nombre premier p , la démonstration se simplifie ainsi, d'après Cayley.

D'après ce qui a été dit, *Cor. XIII*, 2^e, premier alinéa, b points disposés régulièrement sur une circonférence sont les sommets de $\frac{\varphi(b) + 1}{2}$ polygones réguliers de b côtés ; d'où, si q est premier et égal à p , $\frac{1}{2}(p - 1)$ polygones.

Or le nombre total des polygones, tant réguliers qu'irréguliers, est évidemment la moitié du nombre des permutations de $p - 1$ objets, puisque ces polygones se reproduisent deux à deux. D'un autre côté, si nous faisons tourner autour de son centre, et successivement des angles $\frac{2\pi}{p}, \frac{4\pi}{p}, \frac{6\pi}{p}, \dots, \frac{2(p-1)\pi}{p}$, un polygone irrégulier quelconque, nous obtiendrons $p - 1$ autres polygones irréguliers : le nombre des polygones irréguliers possibles est donc un multiple de p . De là, la relation

$$\frac{1}{2}(p - 1)! - \frac{1}{2}(p - 1) \equiv 0.$$

2. Si $x = \alpha$, $y = \beta$ est une solution de $ax - by = 1$;
 $x = c\alpha$, $y = c\beta$ en est une de $ax - by = c$.

3. Trouver x tel que $x \equiv \alpha \pmod{a}$ et $x \equiv \beta \pmod{b}$.

On cherche $bA \equiv 1 \pmod{a}$ et $aB \equiv 1 \pmod{b}$, ce qui donne

$$x \equiv Ab\alpha + Ba\beta \pmod{ab}$$

4. Soit g celui des $b - 1$ premiers entiers positifs qui rend $c - ag$ multiple de b , l'équation $ax + by = c$ a un nombre de solution représenté par la *formule de Paoli*,

$$E\left(\frac{c - ag}{ab}\right) + 1.$$

5. La solution de $ax - by = c$ est donnée par la *formule de Libri*,

$$x = \frac{c - 1}{2} + \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{k=b} \frac{\sin \frac{(2c - a) k\pi}{b}}{\sin \frac{ak\pi}{b}}.$$

6. Soit μ le plus grand commun diviseur des nombres donnés α , β , γ , ... On peut toujours déterminer les nombres A , B , C , ... de manière qu'on ait

$$\frac{A}{\alpha} + \frac{B}{\beta} + \dots = \mu \quad (\text{Gauss}).$$

7. Résoudre les équations

$$x'y'' - x''y' = a, \quad x''y - xy'' = a', \quad xy' - x'y = a''. \quad (\text{Gauss})$$

8. Soit à résoudre les équations

$$x = ay + \alpha = bz + \beta = cw + \gamma = \dots$$

a , b , c , ... étant premiers deux à deux. On pose $P = abc \dots$ et on calcule a' , b' , c' , ... de manière qu'on ait

$$\frac{P}{a} a' \equiv 1 \pmod{a}, \quad \frac{P}{b} b' \equiv 1 \pmod{b}, \dots$$

d'où

$$x = P \left(\frac{a' \alpha}{a} + \frac{b' \beta}{b} + \dots \right)$$

Le problème est ramené au calcul des associés de $\frac{P}{a}$, ... (Voir exercices nos 10, 11 et 22).

9. *Regula cœci*. Partager A en n parties telles que a fois la première, b fois la deuxième, ... fassent ensemble une somme B.

Supposons que a est le plus petit des nombres a, b, c, ... On a :

$$(b - a) y + (c - a) z + \dots = B - aA,$$

équation de la forme $\alpha y + \beta z + \dots = C$, qu'on résout en remarquant qu'il y a au moins deux coefficients, α et β par exemple, qui sont premiers entre eux, ce qui permet de poser

$$\begin{aligned} \alpha\alpha' + \beta\beta' &= 1, \text{ d'où } x = \alpha'(C - \gamma\alpha - \dots) + \beta\lambda, \\ y &= \beta'(C - \gamma\alpha - \dots) + \alpha\mu, \dots \end{aligned}$$

λ, μ, \dots désignant des quantités indéterminées.

10. Divisons a par b, b par le reste, ce reste par le second reste, et ainsi de suite, de sorte qu'on ait

$$a = \alpha b + c, \quad b = \beta c + d, \quad c = \gamma d + e, \dots$$

α, β, \dots sont entiers et b, c, ... diminuent jusqu'à ce qu'on parvienne à $m = \mu n + 1$.

Formons les expressions

$$\begin{aligned} [\alpha] &= \alpha = A \\ [\alpha, \beta] &= \beta A + 1 = B, \\ [\alpha, \beta, \gamma] &= \gamma B + 1 = C, \\ &\dots \end{aligned}$$

on aura

$$[\alpha, \beta, \dots, \mu] [\beta, \dots, \lambda] - [\alpha, \dots, \lambda] [\beta, \dots, \mu] = \pm 1.$$

De là le moyen de résoudre $ax - by = \pm 1$ ¹.

11. Soient r_1, r_2, r_3, \dots et q_1, q_2, q_3, \dots les restes et les quotients obtenus successivement en divisant p par a, r_1, r_2, r_3, \dots . Les restes sont tous différents de zéro et décroissent jusqu'à $r_n = 1$. On a :

$$aq_1 q_2 \dots q_{n-1} \equiv - (-1)^n$$

¹ Les théories que contiennent les exercices 2, 3, 8, 9 et 10 étaient connues des Indiens, comme on le voit chez Brahme-gupta et Bhaskara. Mais c'est seulement Bachet qui a commencé à les exposer avec méthode et en détail.

De là, la solution de $ax \equiv \pm 1$. (Binet).

12. a et b étant premiers entre eux, le produit

$$\frac{x^a - 1}{x - 1} \frac{x^b - 1}{x - 1}$$

est divisible par $\frac{x^{ab} - 1}{x - 1}$ (Gauss).

13. Si on peut écrire $a^2 \equiv r$ et $b^2 \equiv -r$, on a : $x^2 \equiv -1$ (Euler). En effet posons $ax \equiv b$, il viendra $a^2 x^2 \equiv b^2 \equiv -a^2$. (Gauss).

14. Soient $a^2 \equiv r$, $b^2 \equiv rs$, on peut écrire $x^2 \equiv s$ (Euler). En effet posons $ax \equiv b$, il viendra $rs \equiv b^2 \equiv a^2 x^2 \equiv r x^2$. (Gauss).

15. Soit $a^g \equiv a^h \equiv r$, g et h étant premiers entre eux, on peut écrire $r^x \equiv a$. En effet posons $gx - hy = 1$, il viendra

$$r^x \equiv a^{gx} = a^{hy+1} \equiv ar^y \quad (\text{Legendre}).$$

16. Aucun nombre non décomposable en deux carrés entier ne l'est pas non plus en deux carrés fractionnaires (Fermat).

17. L'égalité $ax^2 - y^2 = 1$ ne peut avoir lieu si a n'est pas la somme de deux carrés. (Brahmegupta).

18. Les diviseurs du nombre $a^2 - 3b^2$ sont de l'une des formes quadratiques $\pm x^2 \mp 3y^2$, ou de l'une des formes linéaires 12 ± 1 . (Lagrange).

19. Les nombres $a^4 + 1$ et $a^4 - a^2 + 1$ sont respectivement des deux formes linéaires $8 + 1$ et $12 + 1$. En effet on peut les écrire

$$(a^2 - 1)^2 + 1 \quad \text{et} \quad (a^2 - 1)^2 + a^2 = (a^2 + 1)^2 - 3a^2. \quad (\text{Serret}).$$

20. Si l'un des coefficients A, B , est multiple de p , la congruence $Ax^n + Bx^{n-1} + \dots + M \equiv 0$ ne saurait avoir n racines.

Il en est de même si $M \equiv 0$.

Si elle a n racines, a, b, \dots on peut l'écrire $A(x - a)(x - b) \dots \equiv 0$ et l'on a :

$$A(a + b + \dots) + B \equiv 0, \quad ab \dots \equiv \pm M.$$

21. Du *Cor. XI*, déduire la relation

$$s_{p-1, p-1} \equiv (p-1)!$$

ainsi que le *Cor. IX*.

22. Posons $a^{\varphi(b)} = kb + 1$, on aura

$$a(ca^{\varphi(b)-1}) - b(ck) = c$$

d'où une solution de $ax - by = c$ (Poincot). Ainsi l'associé de a relativement à b est

$$x = a^{\varphi(b)-1}$$

23. Trouver x tel que $x \equiv \alpha \pmod{a}$ et $\equiv \beta \pmod{b}$. On a :

$$x = b^{\varphi(a)} \alpha + a^{\varphi(b)} \beta \pmod{ab}.$$

Ainsi les nombres à la fois des deux formes $3 + 1$ et $4 - 1$ sont de la forme $12 + 7$; ceux des formes $3 - 1$ et $4 + 1$, de la forme $12 + 5$; ceux des formes 3 ± 1 et 4 ± 1 , de la forme 12 ± 1 .

24. Changeons successivement x et y en $1, \alpha, \alpha', \dots, b-1$ dans la relation $a \equiv xy \pmod{b}$ et multiplions, il viendra

$$a^{\varphi(b)} \equiv -\Pi^2 \pmod{b} \quad \text{d'où} \quad \Pi^2 \equiv 1 \pmod{b^2}$$

25. Démontrer les relations

$$\frac{(p-1)(p-2)\dots m}{\left(\frac{p+1}{2}\right)!} \equiv (-1)^m \quad (\text{Lebèsque}).$$

$$(a-1)!(p-a)! \equiv (-1)^a \quad (\text{Lagrange}).$$

A. AUBRY (Beaugency, Loiret).