G. Arnoux. — Arithmétique graphique. — Introduction à l'étude des fonctions arithmétiques. (Essais de Psychologie et de Métaphysique positives.) — 1 vol. gr. in-8, XX-225 p. ; 7 fr. 50 ; Gauthier-Villars, Paris.

Autor(en): **Mirimanoff, D.**

Objekttyp: **BookReview**

Zeitschrift: **L'Enseignement Mathématique**

Band (Jahr): **9 (1907)**

Heft 1: **L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE**

PDF erstellt am: **13.09.2024**

notion de fonction et les premières notions de calcul différentiel et intégral; elles demandent des exercices et problèmes empruntés à d'autres domaines scientifiques et à la vie pratique ; de plus on demande qu'il soit tenu compte des liens entre les mathématiques et d'autres branches notamment la physique et la géométrie descriptive.

Suivant décret du 23 avril 1907, (z. 4748), le Ministre des Cultes et de l'Instruction autorise des essais dans certaines écoles moyennes, afin de permettre l'étude de la réalisation pratique de ces propositions.

Le Conseil scolaire a les pleins pouvoirs pour confier ces essais, provisoirement pendant l'année 1907/08, à ceux des professeurs qui se sont occupés de ces questions et qui possèdent les qualités pédagogiques nécessaires. Bien qu'ils aient toute la liberté quant au programme et à son extension, ils ne devront pas s'écarter des buts des divers enseignements et ne surcharger en aucun cas les élèves.....».

Comme on le voit, les autorités scolaires autrichiennes comprennent qu'il y a lieu de réformer les programmes suivant les vœux qui ont été exprimés dans de nombreuses assemblées, dans celles des naturalistes et médecins allemands comme dans les réunions de professeurs de mathématiques. On sait qu'en France ces réformes ont été introduites depuis plusieurs années.

BIBLIOGRAPHIE

G. Arnoux. — **Arithmétique graphique.** — Introduction à l'étude des fonctions arithmétiques. *(Essais de Psychologie et de Métaphysique positives.)* — 1 vol. gr. in-8, XX-225 p. ; 7 fr. 50 ; Gauthier-Villars, Paris.

M. Arnoux est un visuel. « Si j'ai une question à étudier — dit-il dans la préface de son volume — je me demande si la méthode graphique ne pourrait m'en donner la solution... En tout et pour tout, c'est mon seul et unique moyen de comprendre et de travailler. » C'est la méthode graphique qui lui a permis, il y a quelques années, de résoudre et de généraliser le fameux problème des carrés magiques et diaboliques, et c'est à l'aide de la même méthode qu'il a réussi à établir dans son dernier ouvrage les principales propriétés des congruences.

L'emploi de la représentation graphique dans des recherches arithmétiques n'est pas nouveau. Je me bornerai à rappeler les beaux travaux de M. F. Klein sur les formes quadratiques et les recherches de M. Minkowski. Plus récemment, M. Laisant a donné des applications curieuses des procédés graphiques dans son petit volume « Initiation mathématique. »

M. Arnoux s'en sert d'une manière systématique. Voici en quoi consiste sa méthode :

Pour représenter les faits arithmétiques, M. Arnoux a recours à des assemblages de cases qu'il appelle espaces arithmétiques. Supposons, pour fixer les idées, qu'on ait à étudier une fonction explicite ou implicite de deux variables α et β. Ces variables ne prennent, par hypothèse, que des valeurs entières, et lorsqu'on a fait choix d'un module m, le nombre des valeurs différentes de chacune de ces variables est égal à m. Prenons du papier quadrillé et considérons un carré composé de m^2 cases. A chaque couple de valeurs α, β, on fera correspondre une case déterminée du carré, de même qu'en géométrie analytique tout couple de valeurs des coordonnées détermine un point du plan. Dans chaque case on inscrira la valeur correspondante de la fonction. Un certain nombre de cases pourront contenir 2, 3... nombres différents, — de même qu'on pourra avoir des cases blanches ; ce cas se présentera chaque fois que les valeurs correspondantes de la fonction n'appartiendront pas au domaine de rationalité choisi.

M. Arnoux explique comment on peut procéder dans le cas où le nombre des variables est égal ou supérieur à trois. Il suffit alors de considérer une collection de m, m^2... carrés de m^2 cases, rangés dans un ordre déterminé.

Mais revenons à notre carré de m^2 cases. Les valeurs de la fonction étant inscrites dans les cases correspondantes du carré, l'examen attentif du tableau pourra nous révéler certaines particularités dans la distribution de ces valeurs qui sont la traduction graphique de propriétés arithmétiques de la fonction. En donnant au module des valeurs différentes, on éliminera les propriétés particulières et la comparaison des tableaux pourra nous mettre sur la voie de quelque loi générale. On voit que la méthode de M. Arnoux est, comme il le dit fort bien lui-même, la méthode expérimentale dans toute sa pureté. Comme moyen de découvertes, elle peut rendre des services réels. Dans bien des cas, elle fournit en même temps que des propriétés nouvelles, les éléments nécessaires à leur démonstration. Certes il y a des exceptions, et elles ne sont pas rares, mais le bon côté de la méthode de M. Arnoux est qu'elle nous donne toujours des points d'appui, et son utilité est incontestable.

Les deux premiers chapitres du livre de M. Arnoux sont consacrés à l'étude, à l'aide de la méthode graphique, des opérations élémentaires (mod. m) : multiplication, division, etc. On est conduit, par l'examen des tableaux, aux propriétés fondamentales des nombres entiers et des congruences binômes.

Nous passons ensuite à l'étude (mod p) des fonctions rationnelles entières à coefficients entiers, f (x), le module p étant un nombre premier. Les polynômes f (x) peuvent être supposés primaires. On a alors le théorème fondamental suivant qui domine toute la théorie des congruences : une fonction entière primaire ne peut être décomposée en fonctions irréductibles primaires que d'une seule manière.

Pour établir ce théorème, M. Arnoux se sert de figures qu'il appelle espaces décomposants. L'idée fondamentale reste la même. Une fonction f (x) est définie par ses coefficients. On pourra la représenter en écrivant la suite de ces coefficients dans leur ordre. Par exemple le polynôme $x^3 + 3x + 5$ s'écrira 1035. Ces coefficients jouent le rôle de coordonnées. A toute fonction f (x) de degré n correspond une case déterminée. On inscrira dans cette case les facteurs irréductibles de f (x). Mais comment trouver ces facteurs ?

Au lieu de décomposer les fonctions f (x) (mod. p), M. Arnoux remonte à ces fonctions en partant des fonctions irréductibles de degrés inférieurs à n, qu'il combine entre elles de toutes les manières possibles. A chacun des produits ainsi obtenus correspond une case déterminée. On aura qu'à inscrire dans cette case les facteurs dont on s'est servi. Dans les cas particuliers considérés par M. Arnoux, tous les produits sont différents (mod. p). Le nombre des produits différents est donc égal à celui des combinaisons. Mais cette propriété est-elle générale ? Le supposer c'est se servir implicitement du théorème fondamental qu'il s'agit de prouver. La propriété est loin d'être évidente ; dans les domaines algébriques, la décomposition peut n'être pas univoque et deux produits $\alpha\beta$ et $\gamma\delta$ peuvent être égaux entre eux, sans que le facteur indécomposable α soit égal à aucun des facteurs indécomposables γ et δ. La démonstration de M. Arnoux aurait donc besoin d'être complétée.

Nous abordons, dans le chapitre suivant, l'étude des congruences générales. M. Arnoux se sert très adroitement des imaginaires de Galois dont il esquisse la théorie en appuyant toujours sur les considérations concrètes. Ses tables de puissances des imaginaires méritent une attention spéciale.

Après ces généralités, nous passons à l'étude des congruences du premier, du second et du troisième degré [1]. Ici, les tables de M. Arnoux jouent un rôle particulièrement important. Elles lui permettent de retrouver la plupart des propriétés caractéristiques de ces congruences.

En résumé, ce qui fait avant tout l'originalité du livre de M Arnoux, c'est sa méthode. Malgré son extrême simplicité elle a permis à M. Arnoux de retrouver les principes essentiels de la théorie des nombres. J'engagerais beaucoup le lecteur à faire l'application de cette méthode à l'étude de problèmes qui n'ont pas été traités par M. Arnoux.

M. Arnoux nous apprend dans la préface que son livre est dû à une collaboration. «Comme nom d'auteur il devrait porter à côté du sien, celui de M. C. A. Laisant. C'est en effet M. Laisant qui l'a rédigé. On y retrouve la précision, la clarté et cet art de simplifier les questions les plus ardues que possède à un si haut degré l'auteur de la « Théorie des équipollences » et de l' « Initiation mathématique. »

D. Mirimanoff (Genève).

W. M. Baker. — **Algebraic Geometry.** A new treatise on analytical conic sections. — 1 vol. in-17, 325 23 pp., 6 d., George Bell and Sons, London.

Comme l'auteur le fait remarquer dans sa Préface, ce traité est conforme aux idées nouvelles concernant l'enseignement mathématique. Il est appelé à rendre de grands services à tous ceux qui désirent s'initier d'une façon complète et pratique à la Géométrie analytique élémentaire. L'auteur, s'adressant à des débutants, n'aborde les sections coniques proprement dites qu'après une étude détaillée de la droite et du cercle. Après cela il passe aux courbes du second degré dans l'ordre suivant : Parabole, Ellipse, Hyperbole. Il est à remarquer que cet ordre diffère de celui généralement adopté.

Un des avantages incontestables de ce livre réside dans l'abondance et la variété des exemples ; aucune théorie n'est traitée sans application. Or, il n'est point besoin d'une longue expérience dans l'enseignement mathématique pour se rendre compte de l'utilité des exemples en pareil cas. Rien n'est plus apte à rendre claire une théorie plus ou moins abstraite qu'une application appropriée, et cela est surtout vrai lorsqu'on s'adresse à de jeunes intelligences, auxquelles du reste ce livre est destiné. En outre des exemples traités, l'élève trouvera à la fin de chaque chapitre de nombreux problèmes non

[1] Nous publierons dans un prochain n° une note de M. Mirimanoff sur les congruences du 3me degré se rattachant au livre de M. Arnoux. *(Réd.)*.