Zeitschrift: L'Enseignement Mathématique

Band: 9 (1907)

Heft: 1: L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE

Artikel: PARALLÉLISME ET TRANSLATION RECTILIGNE

Kapitel: Angles formés par deux droites parallèles coupées PAR UNE SÉCANTE.

Autor: Hioux, V.

DOI: https://doi.org/10.5169/seals-10157

grand que soit le nombre entier n, la distance MQ du point M au côté OZ de l'angle aigu ZOY sera égale ou supérieure à $(n+1)\ d$. On aura par suite QM $>$ OP. Soit sur QM un segment QR $=$ OP, le point R sera entre le point Q et le point M. Or la perpendiculaire en P sur OX est parallèle à OZ et, comme à droite de OZ, c'est le lieu des points situés à la distance PO de OZ, elle passe par le point R situé dans l'angle ZOY. Donc :

La perpendiculaire en un point quelconque P au côté OX a deux points P et R de part et d'autre du côté OY ; donc cette perpendiculaire doit rencontrer OY. C. Q. F. D.

Corollaire. — Si deux droites AB et A′B′ sont parallèles, toute droite qui rencontre l'une rencontre l'autre.

Démonstration. — Soit Y′Y (fig. 6) une droite qui rencontre AB au point O, il faut prouver qu'elle rencontre sa parallèle A′B′. Pour cela menons en O la perpendiculaire OX sur A′B′. Cette droite qui est aussi perpendiculaire sur AB fait avec la demi-droite OY un angle aigu YOX complémentaire de l'angle aigu AOY. Soit P le point de rencontre de OX avec A′B′ ; la droite PA′ perpendiculaire au côté OX de l'angle aigu YOX doit rencontrer le côté OY.

Donc la droite Y′Y qui rencontre AB en O doit rencontrer sa parallèle A′B′. C. Q. F. D.

Remarque. — L'angle P est droit et l'angle POY est aigu ; leur somme est donc inférieure à deux droits ; si on remplace POY par son supplément POY′ on aura une somme supérieure à deux droits. La rencontre aura lieu du côté de OP où cette somme est inférieure à 2 droits.

On appelle *sécante* une droite qui rencontre deux droites parallèles.

Angles formés par deux droites parallèles coupées par une sécante.

Théorème VI. — Lorsque deux droites parallèles sont coupées par une sécante :

1° Deux angles correspondants sont égaux ;

2° Deux angles alternes-internes sont égaux;

3° Deux angles intérieurs d'un même côté de la sécante sont supplémentaires.

Démonstration. — Considérons (fig. 9) les deux parallèles AB et A'B' coupées en C et C' par la sécante SS'. Nous allons prouver d'abord que les angles correspondants $\widehat{SCB}$ et $\widehat{SC'B'}$ sont égaux. Pour cela, d'un point arbitraire M de CS menons MP perpendiculaire sur AB et par suite sur sa parallèle A'B' qu'elle rencontre en P'. Les deux triangles rectangles MPC, MP'C' ont un angle aigu commun au point M. Cet angle a pour complément d'une part $\widehat{SCB}$ et d'autre part $\widehat{SC'B'}$; donc ces deux angles correspondants sont égaux. C. Q. F. D.

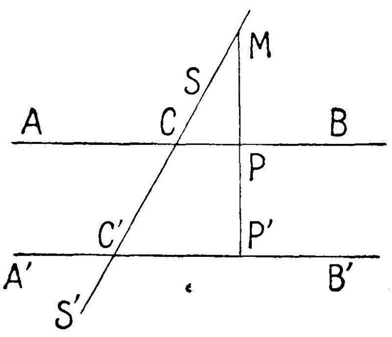

FIG. 9.

Les deux autres parties de l'énoncé sont des conséquences immédiates de la première.

Théorème VII. — Réciproquement: Deux droites coupées par une sécante sont parallèles:

1° Si deux angles correspondants sont égaux;

2° Si deux angles alternes-internes sont égaux;

3° Si deux angles intérieurs d'un même côté de la sécante sont supplémentaires.

Démonstration. — Supposons (fig. 13) que la sécante SS' rencontre en C et C' les deux *droites* AB et A'B' de manière que les angles correspondants SCB et SC'B' soient égaux. D'un point M de CS menons MP' perpendiculaire sur A'B' et soit P son point de rencontre avec AB. Dans le triangle rectangle MP'C' l'angle en M a pour complément l'angle MC'B'. Or, par hypothèse $\widehat{SCB} = \widehat{SC'B'}$; donc dans le triangle MPC la somme des angles aigus en M et en C vaut un droit; donc l'angle P est droit. Donc MP' perpendiculaire sur A'B' est aussi perpendiculaire sur AB. Il en résulte que les droites AB et A'B' perpendiculaires sur une même droite sont parallèles. C. Q. F. D.

Les deux autres réciproques se ramènent à la première.

Corollaire. — Si deux angles ont leurs côtés parallèles deux à deux, soit de même sens, soit de sens contraires, ces angles sont égaux.

Si deux des côtés sont parallèles et de même sens et les deux autres parallèles de sens contraires, les deux angles sont supplémentaires.

Enfin, comme autre conséquence on démontre que :

Si deux angles ont leurs côtés perpendiculaires ils sont égaux s'ils sont de même nature, et ils sont supplémentaires quand ils sont de nature différente.

Translation rectiligne d'une figure plane. Composition de deux translations.

6. Parallélogramme. — Si on coupe un système de deux droites parallèles AB, A′B′, par deux sécantes parallèles AA′ et BB′, on forme un quadrilatère dont les côtés opposés sont parallèles 2 à 2; un tel quadrilatère s'appelle un *parallélogramme.*

On démontre facilement qu'une diagonale AB′ par exemple la partage en deux triangles égaux. On a par suite : $AB = A'B'$ et $AA' = BB'$. Donc :

Dans un parallélogramme les côtés opposés sont égaux 2 à 2. On dit habituellement*:* Les portions de deux droites parallèles comprises entre parallèles sont égales.

On voit de même que dans un parallélogramme deux angles opposés sont égaux et que deux angles consécutifs sont supplémentaires. Enfin, signalons encore la propriété suivante :

Si dans un quadrilatère deux côtés sont à la fois égaux et parallèles la figure est un parallélogramme.

Cela posé, reportons-nous au début de la *première partie.* Par une translation rectiligne de direction Δ le triangle MAB a passé de sa première position a une 2[e] M′A′B′. Si on considère les côtés AM et A′M′ on constate qu'ils forment avec la sécante Δ deux angles correspondants égaux $\widehat{A'} = \widehat{A}$. Donc AM et A′M′ sont deux droites parallèles. Il en est de même de BM et de B′M′. D'ailleurs, dans le déplacement considéré,