Zeitschrift: L'Enseignement Mathématique

Herausgeber: Commission Internationale de l'Enseignement Mathématique

Band: 9 (1907)

Heft: 1: L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE

Artikel: SUR UN THÉORÈME DE M. HAMEL

Autor: Broggi, Ugo

DOI: https://doi.org/10.5169/seals-10159

SUR UN THÉORÈME DE M. HAMEL

1. — M. Hamel a démontré le théorème suivant dans les *Mathematische Annalen* (Vol. 60, 1905 : « Ueber eine Basis aller Zahlen und die unstetigen Lösungen der Funktionalgleichung $f(x+y) = f(x) + f(y)$ » :

« Il existe une *base* de tous les nombres, c'est-à-dire, il existe un ensemble de nombres a, b, c, ... tels que tout nombre x peut être représenté univoquement par une expression de la forme

$$x = \alpha a + \beta b + \gamma c + \dots ,$$

où les coefficients α, β, γ ..., qui ne sont pas nuls, sont rationnels et en nombre fini ».

Il est bien aisé de déduire du théorème énoncé l'existence d'infinies solutions discontinues de l'équation fonctionnelle

$$f(x+y) = f(x) + f(y) ,$$

dont toute fonction de la forme

$$f(x) = \alpha f(a) + \beta f(b) + \gamma f(c)$$

est solution, les valeurs de la fonction $f(x)$ correspondant aux membres de la base étant supposées arbitrairement choisies.

Mais il est aisé d'en déduire aussi la possibilité de la décomposition de tout nombre x du continu en un produit d'un nombre fini de puissances rationnelles d'autres nombres formant un ensemble numérable. Nous nous proposons de définir cet ensemble en nous appuyant de considérations analogues à celles qui ont conduit au premier, et indépendamment de celui-ci.

« Il existe un ensemble de nombres m, n, p, ... tels que tout nombre x du continu peut être représenté univoquement sous la forme

$$x = m^{\mu} \, . \, n^{\nu} \, . \, p^{\pi} \dots \qquad (2)$$

où les exposants $\mu, \nu, \pi \ldots$ différents de zéro sont rationnels et en nombre fini. »

Les considérations suivantes se fondent sur le théorème de Zermelo, affirmant la possibilité de bien ordonner un ensemble quelconque (*Mathem. Annalen,* vol. 58). On sait que pour qu'un ensemble soit dit bien ordonné (ou série bien ordonnée) il faut et il suffit :

Qu'il existe un premier élément de l'ensemble ;

Qu'il existe un premier élément de tout ensemble dont tous les éléments sont éléments de l'ensemble considéré.

Nous disons que les nombres a, b, c... sont nombres de la base I, et les nombres m, n, p, ... nombres de la base II.

2. — Soit, par rapport à un bon ordre déterminé du continu, m le premier élément : il est aussi le premier des nombres de la base II. Nous supposons éliminés tous les nombres dont la forme est m^{μ} (μ rationnel et quelconque).

Il suit de l'hypothèse de bon ordre, que l'ensemble des éléments qui ne sont pas puissances rationnelles de m a un premier élément, soit n. Cet élément est le second des nombres de notre base. Nous supposons qu'on élimine à présent tous les nombres qui se laissent décomposer dans le produit d'une puissance rationnelle de m et d'une puissance rationnelle de n : le premier des éléments de l'ensemble résidu, par hypothèse le nombre p, est le troisième des nombres de la base II. Et ainsi de suite.

Supposons que X soit l'ensemble des nombres qui, dans le bon ordre considéré, précèdent x.

Nous disons que x appartient à la base, s'il n'est pas possible de poser

$$x = m^{\mu} \cdot n^{\nu} \ldots\ldots r^{\rho}$$

où m, n, ... r, sont en nombre fini et appartenant à X, et μ, ν, ... , ρ rationnels.

On déduit de cette définition que, si m, n, ... r appartiennent à la base, on ne peut avoir

$$m^{\mu} \cdot n^{\nu} \ldots\ldots r^{\rho} = 1 , \tag{3}$$

car autrement il serait possible de poser

$$r = m^{\mu'} . n^{\nu'} \ldots\ldots$$

μ', ν', ... rationnels. Et il suit de l'impossibilité de (3) que, si une décomposition de la forme (2) est possible, elle l'est d'une seule manière. Car on aurait

$$x = m^{\mu'} . n^{\nu'} . p^{\pi'} \ldots \; ; \quad x = m^{\mu} . n^{\nu} . p^{\pi} \ldots$$

$$m^{\mu' = \mu} \; . n^{\nu' - \nu} . p^{\pi' - \pi} \ldots\ldots = 1 .$$

Mais il est aussi évident que tout nombre du continu, qui ne peut être décomposé dans le produit d'un nombre fini de puissances rationnelles d'éléments de la base, appartient à celle-ci.

Supposons en effet que Y′ soit l'ensemble des nombres, qui n'appartiennent pas à la base et n'admettent pas une décomposition de la forme (2), et supposons que y soit le premier élément de Y′. On a de la précédente définition l'appartenance de y à la base : Y′ n'aurait donc de premier élément, ce qui serait contraire au théorème de Zermelo.

La proposition énoncée est ainsi démontrée dans sa totalité.

Ugo Broggi (Rome).

SUR LA POLARITÉ DANS LES COMPLEXES DU SECOND DEGRÉ (ORDRE ET CLASSE)

Cette note est basée sur la propriété des droites d'un complexe du second degré (ordre et classe) appartenant à un plan π, d'envelopper une courbe de la seconde classe.

1. — Soit Φ un complexe de second degré donné. Un plan π passant par un point donné P rencontre le complexe Φ suivant une conique, la polaire de P par rapport à cette conique est une droite p. Lorsque le plan π décrit la gerbe de som-