Zeitschrift: L'Enseignement Mathématique

Band: 9 (1907)

Heft: 1: L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE

Artikel: SUR LES PROJECTIONS DES DROITES PERPENDICULAIRES

Autor: Majcen, G.

DOI: https://doi.org/10.5169/seals-10163

$$(r^x)^h \equiv r^{(p-1)y+\theta} \equiv r\theta \equiv R^{g\theta}.$$

x est évidemment premier avec $p - 1$, donc le reste de r^x prend toutes les valeurs 1, 2, 3, ... $p - 1$, et on peut mettre r au lieu de r^x. On peut donc dire que r^h a les mêmes valeurs que $R^{g\theta}$.

En particulier, si h est premier avec $p - 1$, il y a $p - 1$ restes différents. Si $h = 2$, il y en a $\frac{p-1}{2} = m$, qui sont les résidus quadratiques. En général, le nombre des résidus de puissances $h^{\text{èmes}}$ est $\frac{p-1}{h}$.

A. Aubry (Beaugency, Loiret).

SUR LES PROJECTIONS DES DROITES PERPENDICULAIRES

(A propos d'un récent article de M. *Lehr*[1]).

Dans divers ouvrages sur la géométrie descriptive on ne fait presque aucune mention des projections de deux droites perpendiculaires. Même dans les récentes *Leçons sur la Géométrie descriptive* de M. Loria, qui contiennent un grand nombre de particularités très intéressantes, on ne trouve que quelques indications sur cette question. Je me propose de développer ici une démonstration simplifiée de la condition donnée par M. Lehr pour les projections de deux droites perpendiculaires (théorème III^me^ de l'article cité).

Les projections orthogonales $g'g''$, $h'h''$ de deux droites g et h étant données, menons par le point commun des projections horizontales et par l'intersection des projections verticales deux droites m et n perpendiculairement à la direction de la ligne de terre. Nous obtiendrons ainsi deux triangles que l'on peut considérer comme deux projections d'un tétraèdre $ABCD$. Les arêtes AB et CD sont toujours per-

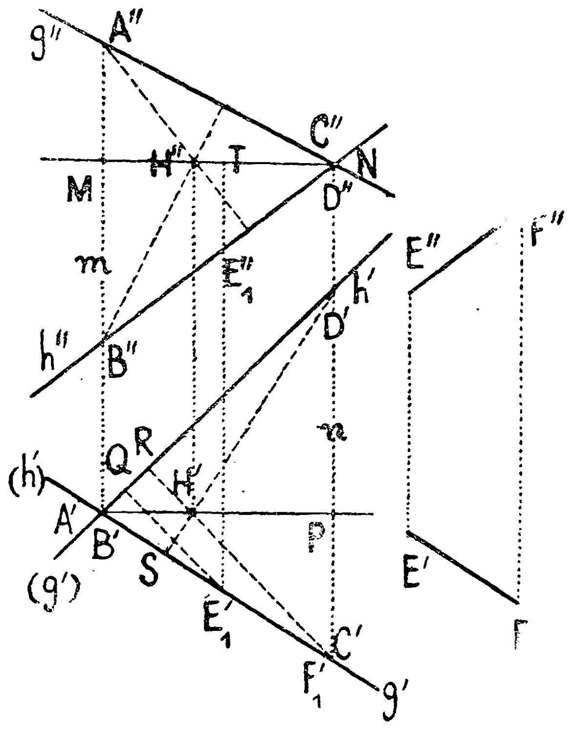
[1] L'Enseign. math., IX^e^ année, p. 119; 1907.

pendiculaires; s'il en est de même pour deux autres arêtes opposées, par exemple $g = AC$ et $h = BD$, les arêtes AD et BC seront aussi perpendiculaires et, d'après un théorème connu de stéréométrie, le tétraèdre sera *orthocentrique*, c'est-à-dire, les quatre hauteurs auront un *point commun* H.

Les projections verticales des hauteurs du tétraèdre passant par les sommets A et B, sont deux hauteurs du triangle $A''C''B''$, et les projections horizontales sont sur la hauteur $A'P$ du triangle $C'A'D'$. Les hauteurs du tétraèdre passant par les sommets C et D ont leurs projections horizontales sur les hauteurs correspondantes du triangle $C'A'D'$, et leurs projections verticales sont unies sur la hauteur MN du triangle $A''C''B''$.

Si donc les droites g et h sont perpendiculaires, les orthocentres H'' et H' des triangles $A''C''B''$ et $C'A'D'$ seront sur la *même droite perpendiculaire à la ligne de terre*, c'est-à-dire, le tétraèdre $ABCD$ sera orthocentrique. Or, les projections g' et h' pourront être changées entre elles.

On voit immédiatement que la condition donnée pour H' et H'' est nécessaire; elle est suffisante parce qu'un tétraèdre



orthocentrique (dont deux arêtes perpendiculaires sont $\overline{AB}$ et $\overline{CD}$) doit avoir trois couples des arêtes opposées perpendiculaires.

En considérant la figure, nous aurons les égalités

$$-A''M \cdot B''M = A'R \cdot A'D' = MH'' \cdot MN ,$$

ce qui est précisément la condition donnée par M. *Lehr*. On peut écrire aussi

$$-A''M \cdot B''M = A'S \cdot A'C' .$$

Si deux *longueurs* $\overline{AD}$ et $\overline{EF}$ sont données, on démontre aisément que la condition de perpendicularité reste vraie.

Par une translation on peut faire coïncider le point F'' avec le point C'', et on peut faire passer le prolongement de la projection horizontale $(\overline{E_1'F_1'})$ par A'; le point extrême $E'E''$ vient alors en $E_1'E_1''$.

Soit QR la projection de la longueur $E_1'F_1'$ sur $A'D'$. De ce qu'on aura

$$\mathrm{TE}_1'' : \mathrm{QR} = \mathrm{MB}'' : \mathrm{A'R} ,$$

il résultera la même condition comme auparavant :

$$-\mathrm{A''M} \cdot \mathrm{E}_1''\mathrm{T} = \mathrm{A'D'} \cdot \mathrm{QR} .$$

Dans l'enseignement, la démonstration exposée peut être admise avant de l'étude des transformations et les moyens qui se trouvent appliqués appartiennent plus à la géométrie descriptive qu'au calcul.

G. Majcen (Agram).