Zeitschrift: L'Enseignement Mathématique

Band: 9 (1907)

Heft: 1: L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE

Buchbesprechung: H. Lebesgue. — Leçons sur les séries trigonométriques professées au Collège de France. — 1 vol. in-8° de VII-128 pages ; 3 fr. 50 ; Gauthier-Villars, Paris.

Autor: Buhl, A.

H. Lebesgue. — **Leçons sur les séries trigonométriques** professées au Collège de France. — 1 vol. in-8° de VII-128 pages ; 3 fr. 50 ; Gauthier-Villars, Paris.

Ce petit volume est un tableau de l'état actuel de la théorie des séries trigonométriques. Toujours les choses les plus importantes sont mises en lumière ou tout au moins signalées. Une introduction nous initie aux propriétés générales des fonctions de variables réelles et le premier chapitre nous montre le début historique de la théorie.

La sommation des séries étudiées est d'abord envisagée au point de vue d'Euler et de Lagrange, d'après lequel une série trigonométrique peut être considérée comme la partie réelle (ou la partie imaginaire) d'une fonction analytique représentée d'abord par une série de Taylor. Vient ensuite la méthode de Fourier. Signalons aussi une méthode récente due à M. Kneser d'un caractère absolument original et d'ailleurs de la plus haute importance, car cette même méthode s'applique aux séries formées non pas seulement de sinus et de cosinus, mais formées aussi d'intégrales d'équations linéaires du second ordre à coefficients quelconques. Et l'on sait que de telles séries jouent un grand rôle en physique mathématique, notamment dans le problème du refroidissement d'une barre hétérogène et dans d'autres du même genre résolus formellement depuis longtemps, mais inachevés cependant faute d'une démonstration suffisante de la convergence des séries obtenues. M. Lebesgue ne va pas si loin car il sortirait de son sujet, mais il a eu le mérite de développer, à propos des séries trigonométriques proprement dites, une méthode analogue à celle de M. Kneser. Il nous montre aussi, sur un exemple particulier fourni par l'équation de Laplace, que les développements en séries de polynômes des fonctions de variables réelles sont liés aux équations aux dérivées partielles à solutions analytiques.

Le chapitre III est, à mon avis, le plus élevé et le plus important. Il traite de la convergence en remplaçant d'abord la série trigonométrique par une intégrale définie bien connue, mais il ajoute beaucoup aux considérations élémentaires habituelles.

Il est assez malaisé de dire au premier abord quels sont les cas les plus généraux dans lesquels le procédé est valable. Pendant longtemps on s'était contenté des conditions dites de Dirichlet. Il y en a d'autres dues à MM. Dini, Lipschitz, Jordan. Et si l'on étudie l'intégrale définie en question indépendamment de son origine, elle donne des résultats qui, s'ils ne se rapportent plus immédiatement à des séries trigonométriques, n'en sont pas moins fort intéressants. C'est ainsi que M. Lebesgue est amené à parler des sommes de Gauss.

Signalons aussi l'étude des séries trigonométriques divergentes. Ces séries peuvent être sommables par des procédés remarquables. Il y a celui de Poisson qui transforme la série trigonométrique en une fonction harmonique et celui de M. Tejér qui n'est autre chose que la méthode de sommation de M. Borel convenablement appliquée.

Quant aux opérations sur les séries de Fourier, il est visible que M. Lebesgue a été un peu trahi par le sujet. Le plus clair est qu'on ne sait pas grand'chose, mais l'auteur fait des efforts pour montrer les difficultés du sujet et la nature des problèmes qui se posent.

Enfin le dernier chapitre intitulé : « Séries trigonométriques quelconques », revient sur la délicate question de savoir quelles peuvent être les séries trigonométriques représentant des fonctions données. C'est surtout une belle analyse des idées de Riemann et des recherches qu'elles ont entraînées. A ce propos, ajoutons que M. Lebesgue a fort bien montré les nombreuses analogies que les questions traitées dans ce nouvel ouvrage ont avec celles traitées dans celui qui a trait à l'intégration, et que j'ai déjà analysé dans ce Journal. La grande figure de Riemann domine ces œuvres.

A. BUHL (Montpellier).

M. PETROVITCH. — **La Mécanique des Phénomènes fondée sur les Analogies.** (Collection Scientia.) — 1 vol. 95 p., 2 fr. Gauthier-Villars, Paris.

Dans le *Discours préliminaire* aux *Leçons sur les coordonnées curvilignes* (Paris, 1859), Lamé, après avoir fait ressortir les analogies entre la théorie du potentiel, l'hydrostatique et la théorie de la chaleur, analogies qui reposent sur des propriétés communes et sur l'identité des formules analytiques, a écrit que ce rapprochement « fait entrevoir l'avénement futur d'une science rationnelle unique, embrassant, par les mêmes formules, les trois branches des mathématiques appliquées que je viens de définir, et, en outre, la théorie des ondes sonores et celle des ondes lumineuses, qui ne sont autres que la théorie générale de l'élasticité dans l'état dynamique ».

Le petit livre de M. Petrovitch, qui fait partie de l'intéressante collection *Scientia,* est un premier pas vers la constitution de cette science, de cette mécanique générale, que Lamé entrevoyait.

L'analyse d'une analogie entre des phénomènes divers fait ressortir d'elle-même la raison intime et commune à toutes les analogies ; celle-ci réside dans l'identité des rôles joués par certains éléments dans les phénomènes analogues. Alors M. Petrovitch se demande avant tout s'il est possible de schématiser ces rôles, c'est-à-dire de les dégager en quelque sorte de ce qui les rattache spécialement à telle ou telle espèce de phénomènes et de les présenter sous une forme assez simple et assez générale pour qu'ils puissent s'adapter à tous les phénomènes embrassés par une même analogie ; et après cela si on peut aussi schématiser les phénomènes d'un même groupe.

C'est à ces questions, très clairement posées, que M. Petrovitch a consacré son petit ouvrage, plein d'érudition et qu'on lit avec beaucoup de plaisir.

Le livre comprend quatre chapitres ; dans le premier, l'auteur a fait une soigneuse et très intéressante étude des analogies déjà connues, et auxquelles il faut ajouter maintenant celle entre les problèmes d'équilibre des corps élastiques à connexion multiple et les mouvements d'un fluide à potentiel polidrome et qui a fait l'objet des recherches de M. Volterra. L'auteur a toujours soin de faire bien saisir la correspondance entre les éléments correspondants des phénomènes d'une même analogie.

Dans le chapitre II *(Esquisse d'une mécanique générale des causes et des effets)* est exposée la partie nouvelle et originale du livre. L'auteur considère les systèmes formés par des *objets;* chaque objet est défini par un certain nombre de variables qui déterminent à chaque instant sa position, sa vitesse, ses longueurs d'onde, les diverses radiations simples, etc. Les *causes* directes ou indirectes qui interviennent dans la production d'un phénomène sont, au fond, représentées par des vecteurs ; et la généralisation des principes fondamentaux de la dynamiqne permet de traduire en équations les relations entre les causes directes et les objets. On comprend que l'on peut, par conséquent, généraliser aussi quelques-uns des théorèmes de la mécanique : principe de l'impulsion, de D'Alembert, intégrale des forces vives, etc.