

**Zeitschrift:** L'Enseignement Mathématique  
**Band:** 9 (1907)  
**Heft:** 1: L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE

**Artikel:** GÉNÉRATION DES COURBES ET DES SURFACES SUPÉRIEURES  
**Autor:** Crelier, L.  
**DOI:** <https://doi.org/10.5169/seals-10141>

### **Nutzungsbedingungen**

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. [Siehe Rechtliche Hinweise.](#)

### **Conditions d'utilisation**

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. [Voir Informations légales.](#)

### **Terms of use**

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. [See Legal notice.](#)

**Download PDF:** 19.11.2024

**ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, <https://www.e-periodica.ch>**

# GÉNÉRATION DES COURBES ET DES SURFACES SUPÉRIEURES

(NOTES DE GÉOMÉTRIE SYNTHÉTIQUE <sup>1</sup>.)

## I

### Courbes du $(n + p)^{\text{e}}$ degré.

Nous appellerons *groupe du  $(n + p)^{\text{e}}$  degré* deux faisceaux de rayons tels que tout rayon du premier correspond à  $p$  rayons du deuxième et tels encore que chaque rayon de celui-ci correspond à  $n$  du premier.

**THÉORÈME.** *Le lieu des points de coupe des rayons homologues de deux faisceaux formant un groupe du  $(n + p)^{\text{e}}$  degré est une courbe du  $(n + p)^{\text{e}}$  degré. Le sommet du premier faisceau est un point multiple d'ordre  $n$  et celui de l'autre un point multiple d'ordre  $p$ .*

### Courbes de la $(n + p)^{\text{e}}$ classe.

*Un groupe de la  $(n + p)^{\text{e}}$  classe est formé de deux ponctuelles dans lesquelles chaque point de l'une correspond à  $p$  de l'autre et chaque point de celle-ci à  $n$  de la première.*

**THÉORÈME.** *L'enveloppe des droites joignant les points homologues de deux ponctuelles appartenant à un groupe de la  $(n + p)^{\text{e}}$  classe est une courbe de la  $(n + p)^{\text{e}}$  classe. La première base est une tangente multiple d'ordre  $n$  et l'autre, une d'ordre  $p$ .*

En désignant par  $\alpha$  et  $\beta$  les coefficients angulaires de deux rayons homologues ou les abscisses de deux points homologues, ces valeurs  $\alpha$  et  $\beta$  seront, en se basant sur les définitions précédentes, liées par l'équation :

$$\beta^p F_1^{(n)}(\alpha) + \beta^{p-1} F_2^{(n)}(\alpha) + \dots + \beta F_p^{(n)}(\alpha) + F_{p+1}^{(n)}(\alpha) = 0 \quad (1)$$

dans laquelle on a :

$$F_1^{(n)}(\alpha) = A\alpha^n + B\alpha^{n-1} + \dots + L\alpha + P.$$

<sup>1</sup> Voir L. CRELIER : C. R., 11 juin et 2 juillet 1906; et l'« Enseign. mathématique », 15 novembre 1906.

En prenant  $S_n$ , sommet du premier faisceau comme origine et  $S_p$ , sommet de l'autre sur l'axe des  $x$  avec une abscisse égale à  $k$  nous aurons pour les équations de deux rayons homologues :

$$\begin{aligned} y &= \alpha x \\ y &= \beta (x - k) . \end{aligned}$$

On en déduit :

$$\alpha = \frac{y}{x} \quad \text{et} \quad \beta = \frac{y}{x-k} .$$

En introduisant ces valeurs dans l'équation générale (1) et en posant :

$$\begin{aligned} Ay^n + By^{n-1} \cdot x + \dots + Lyx^{n-1} \\ + P^n x = F^{(n)}(xy) \end{aligned}$$

nous aurons :

$$\begin{aligned} y^p F_1^{(n)}(xy) + y^{p-1} (x - k) F_2^{(n)}(xy) \\ + \dots + y (x - k)^{p-1} F_p^{(n)}(xy) + \\ (x - k)^p F_p^{(n)}(xy) = 0 . \end{aligned}$$

Cette équation représente le lieu des points cherché. Elle est du  $(n + p)^e$  degré et le terme inférieur du degré  $n$ . D'autre part  $x = k$  entraîne

$$y^p F_1^{(n)}(xy) = 0$$

ou aussi

$$y^p = 0 .$$

Dans ces conditions la courbe est du  $(n + p)^e$  degré. L'origine  $S_n$  est un point multiple d'ordre  $n$  et le point  $(k, 0)$  est aussi un point multiple d'ordre  $p$ .

Nous prendrons les ponctuelles comme axes et nous utiliserons les coordonnées linéaires. Toute droite joignant deux points homologues sera définie par les équations :

$$\mu = \frac{1}{\alpha} \quad \text{et} \quad \nu = \frac{1}{\beta} .$$

On a donc :

$$\alpha = \frac{1}{\mu} \quad \text{et} \quad \beta = \frac{1}{\nu} .$$

En introduisant ces valeurs dans l'équation générale on obtient évidemment l'équation de l'enveloppe cherchée ; soit :

$$\begin{aligned} \frac{1}{\nu^p} F_1^{(n)}\left(\frac{1}{\mu}\right) + \dots + \frac{1}{\nu} F_p^{(n)}\left(\frac{1}{\mu}\right) + \\ F_{p+1}^{(n)}\left(\frac{1}{\mu}\right) = 0 . \end{aligned}$$

On en déduit de suite :

$$\begin{aligned} \nu^p F_{p+1}^{(n)}(\mu) + \nu^{p-1} F_p^{(n)}(\mu) + \dots \\ + F_1^{(n)}(\mu) = 0 . \end{aligned}$$

L'équation est bien de la  $(p + n)^e$  classe.

La valeur  $\nu = \infty$  entraîne

$$F_{p+1}^{(n)}\left(\frac{1}{\mu}\right) = 0 ;$$

en conséquence, la première base est une tangente multiple d'ordre  $n$ . D'un autre côté  $\mu = \infty$  nous donne :

$$\begin{aligned} P_1 \frac{1}{\nu^p} + P_2 \frac{1}{\nu^{p-1}} + \dots + P_p \frac{1}{\nu} + \\ P_{p+1} = 0 \end{aligned}$$

ou

$$\varphi^p \left( \frac{1}{\nu} \right) = 0.$$

La deuxième base est une tangente multiple d'ordre  $p$ .

**COROLLAIRE.** *Quand les faisceaux ont deux rayons homologues confondus, la courbe se ramène à une courbe du  $(n + p - 1)^e$  degré. Le sommet du premier faisceau est un point multiple d'ordre  $(n - 1)$  et l'autre un d'ordre  $(p - 1)$ . La droite formée par les rayons homologues s'est détachée de la courbe.*

**COROLLAIRE.** *Quand les deux divisions ont un point homologue commun la courbe est de la  $(n + p - 1)^e$  classe. La première base est tangente multiple d'ordre  $(n - 1)$  et l'autre d'ordre  $(p - 1)$ .*

La ligne des sommets est confondue avec les rayons homologues dont il est question. En la prenant comme axe des  $x$ , la solution  $\alpha = 0$  entraînera  $\beta = 0$ .

Le point commun est pris comme origine et la solution  $\alpha = 0$  donne  $\beta = 0$ .

Cette condition donne

Ceci entraîne par conséquent :

$$P_{p+1} = 0.$$

$$P_{p+1} = 0.$$

L'équation de la courbe devient :

L'équation du lieu devient

$$y^p F_1^{(n)}(xy) + y^{p-1}(x-k)F_2^{(n)}(xy) + \dots + (x-k)^p y F_{p+1}^{(n-1)}(xy) = 0.$$

$$\frac{1}{\nu^p} F_1^{(n)} \left( \frac{1}{\mu} \right) + \dots + \frac{1}{\mu} F_{p+1}^{(n-1)} \left( \frac{1}{\mu} \right) = 0$$

ou

A cause du dernier terme on trouve

$$\nu^p F_{p+1}^{(n-1)}(\mu) + \dots + F_1^{(n)}(\mu) = 0.$$

La classe de la courbe est  $(n + p - 1)$ .

$$y = 0 \text{ et}$$

$$\nu = \infty \text{ donne } \frac{1}{\mu} F_{p+1}^{(n-1)} \left( \frac{1}{\mu} \right) = 0.$$

$$y^{p-1} F_1^{(n)}(xy) + \dots +$$

$$(x-k)^p F_{p+1}^{(n-1)}(xy) = 0.$$

Celle-ci montre suffisamment que le degré de la courbe est  $(n + p - 1)$ , puis que les points  $(0,0)$  et  $(k,0)$  sont des points

On a donc  $(n - 1)$  solutions en  $\frac{1}{\mu}$  différentes de  $\mu = \infty$  ; la première base est tangente

multiples d'ordre, le premier  $(n - 1)$  et l'autre  $(p - 1)$ .

multiple d'ordre  $(n - 1)$ ;  $\mu = \infty$  donne :

$$P_1 \frac{1}{\nu^p} + P_2 \frac{1}{\nu^{p-1}} + \dots + P_p \frac{1}{\nu} = 0$$

ou

$$\frac{1}{\nu} \left( P_1 \frac{1}{\nu^{p-1}} + \dots + P_{p-1} \right) = 0.$$

Il y a  $(p - 1)$  solutions en  $\frac{1}{\nu}$  différentes de  $\nu = \infty$ ; la deuxième base est tangente multiple d'ordre  $(p - 1)$ . Comme  $\mu = \infty$  donne également  $\nu = \infty$ , toute droite passant par l'origine serait une tangente et *l'origine devient un point isolé détaché de la courbe.*

#### CONSTRUCTION DES COURBES.

En coupant le faisceau  $S_n$  par un rayon issu de  $S_p$  puis  $S_p$  par un des rayons homologues du précédent issu de  $S_n$ , on obtient deux ponctuelles formant un groupe du  $(n + p)^e$  ordre régi par le cas spécial.

En d'autres termes, la courbe du  $(n + p)^e$  degré correspondant à deux faisceaux du  $(n + p)^e$  degré également se déduira d'une courbe de la  $(n + p - 1)^e$  classe dépendant de deux ponctuelles ayant un point homologue commun.

Le choix des ponctuelles étant arbitraire, il y a une infinité de courbes analogues de la  $(n + p - 1)^e$  classe qui peuvent servir pour la construction de la courbe principale.

Etant donné un groupe de la  $(n + p)^e$  classe formé par deux ponctuelles, nous pouvons former deux faisceaux ayant un rayon homologue commun et formant un groupe du  $(n + p)^e$  degré régi par le cas spécial. Il suffit pour cela de joindre un point d'une ponctuelle avec tous ceux de l'autre puis un des points homologues de celle-ci avec tous ceux de la première. La courbe primitive de la  $(n + p)^e$  classe dépend ainsi d'une courbe du  $(n + p - 1)^e$  degré. Le choix des sommets des faisceaux secondaires étant arbitraire, la courbe auxiliaire peut avoir une infinité de positions.

Quand on veut déterminer de nouvelles tangentes de la courbe

Pour obtenir les points de la courbe du  $(n + p)^{\text{e}}$  degré engendrée par les deux faisceaux primitifs on peut remarquer que les tangentes à la courbe auxiliaire menées par un point quelconque d'une des ponctuelles considérées, donnent les points homologues sur l'autre. En outre, si l'on joint les points homologues des ponctuelles avec les sommets respectifs on obtient des rayons homologues des deux faisceaux. Les points de coupe des rayons homologues sont les points cherchés.

Dans un mémoire précédent (*L'Ens. math.* l. c.) nous avons montré que pour les courbes du  $(n + 1)^{\text{e}}$  degré ou de la  $(n + 1)^{\text{e}}$  classe, les courbes auxiliaires se ramenaient successivement par degré et par classe jusqu'à des coniques.

*Remarque* : Pour construire deux faisceaux ou deux divisions formant un groupe du  $(n + p)^{\text{e}}$  ordre il faut

$$(n + 1)(p + 1) - 1 = np + p + n \text{ coefficients}$$

dans l'équation fondamentale (1), autrement dit, une courbe du  $(n + p)^{\text{e}}$  degré ou de la  $(n + p)^{\text{e}}$  classe dépendant d'un tel groupe peut être construite dès qu'on connaît  $np + p + n$  paires d'éléments homologues.

*Courbes du 4<sup>e</sup> degré avec deux points doubles.*

Ces courbes proviennent de deux faisceaux tels qu'à chaque rayon du premier en correspondent deux du deuxième et inversement. Il faut huit paires de rayons homologues pour les déterminer.

La courbe auxiliaire qui permet de les construire est une courbe de la troisième classe, courbe générale déterminée par un ensemble de neuf tangentes.

principale, on mène un rayon d'un des faisceaux secondaires, puis on joint ses points de coupe avec la courbe auxiliaire, avec le sommet du deuxième faisceau. Les divers rayons ainsi obtenus donnent des points homologues sur les deux bases, et les lignes de jonction de ces points homologues sont des tangentes nouvelles de la courbe primitive.

*Courbes de la 4<sup>e</sup> classe avec deux tangentes doubles.*

Ces courbes proviennent de deux ponctuelles telles qu'à chaque point de l'une correspondent deux points de l'autre et inversement.

Elles demandent huit paires de points homologues pour être construites.

La courbe auxiliaire à laquelle on peut les rattacher est une courbe générale du troisième degré donnée par neuf points.

*Nouvelle construction des courbes du 3<sup>e</sup> degré par neuf points.* La courbe est engendrée par un groupe du  $(2 + 2)^e$  degré avec un rayon homologue commun aux deux faisceaux.

Au point de vue constructif, nous admettrons la courbe comme provenant d'un faisceau de coniques, homographique avec un faisceau de rayons.

Le faisceau de coniques est déterminé par quatre points; chacune d'elles passera par un autre des points connus. Considérons une nouvelle conique déterminée par les cinq derniers points. Un point quelconque de celle-ci donne une involution de rayons avec le faisceau de rayons fondamental.

D'autre part les tangentes des coniques du premier faisceau prises par l'un quelconque des quatre points constituent un faisceau de rayons homographique avec l'involution.

Comme on possède cinq paires d'éléments homologues de ces deux derniers faisceaux, on peut construire la cubique à point double correspondante et en déduire le faisceau simple puis la cubique cherchée.

*Nouvelle construction des courbes de 3<sup>e</sup> classe par neuf tangentes.* On peut considérer cette courbe comme provenant d'un groupe de la  $(2 + 2)^e$  classe avec un point homologue commun aux deux bases. Constructivement nous formerons avec les éléments connus, un faisceau de courbes de deuxième classe et une division de points simples qui lui est homographique.

Nous prendrons quatre tangentes pour déterminer le faisceau de coniques, chacune d'elles s'appuiera sur une autre des tangentes. Nous considérerons en outre une nouvelle conique déterminée par les cinq dernières tangentes. Une quelconque de ces tangentes coupera les paires de tangentes à cette dernière conique issues des points de la division fondamentale, suivant une involution. D'un autre côté les points de tangence des coniques du premier faisceau avec une des tangentes fondamentales formeront une division de points homographique avec l'involution précédente.

Comme on a cinq paires de points homologues de ce groupe nouveau, on peut d'après ce qui précède construire la courbe de troisième classe à tangente double correspondante et en déduire la base de la division simple puis la courbe générale cherchée.

En appliquant le raisonnement général à ces nouvelles courbes, considérées comme courbes auxiliaires dans des groupes du  $(2 + 2)^e$  ordre, on obtiendra sans difficulté les courbes relatives à ces groupes.

## II

Cônes du  $(n + p)^{\text{e}}$  degré.

Deux faisceaux de plans dont les arêtes ont un point commun peuvent former un *groupe du*  $(n + p)^{\text{e}}$  *degré* dans les mêmes conditions que deux faisceaux de droites. Un plan du premier correspond à  $p$  du deuxième et un de celui-ci à  $n$  du premier.

**THÉORÈME.** *Le lieu géométrique des lignes d'intersection des plans homologues de deux faisceaux de plans d'un groupe du  $(n + p)^{\text{e}}$  degré est un cône du  $(n + p)^{\text{e}}$  degré. L'arête du premier faisceau est une génératrice multiple d'ordre  $n$  et celle de l'autre une d'ordre  $p$ .*

Dans un système de trois axes nous considérerons l'axe des  $x$  comme arête du premier faisceau et celui des  $y$  comme arête du second.

Les équations des plans du premier faisceau seront de la forme

$$z = \alpha y .$$

Celles des plans de l'autre :

$$z = \beta x .$$

Les valeurs  $\alpha$  et  $\beta$  sont liées par l'équation (1) du chapitre précédent, de telle manière que toute valeur de  $\beta$  en donne  $n$  de  $\alpha$  et une de  $\alpha$  en donne  $p$  de  $\beta$ .

On a :

$$\alpha = \frac{\tilde{z}}{y} \quad \text{et} \quad \beta = \frac{\tilde{z}}{x} .$$

Cônes de la  $(n + p)^{\text{e}}$  classe.

Deux faisceaux de rayons situés chacun dans un plan et ayant les sommets communs forment un groupe de la  $(n + p)^{\text{e}}$  classe quand, à tout rayon du premier en correspondent  $p$  du deuxième et à tout rayon du deuxième  $n$  du premier.

**THÉORÈME.** *L'enveloppe des plans passant par deux rayons homologues de deux faisceaux formant un groupe de la  $(n + p)^{\text{e}}$  classe est un cône de la  $(n + p)^{\text{e}}$  classe. Le plan du premier faisceau est un plan tangent multiple d'ordre  $n$  et l'autre un plan tangent multiple d'ordre  $p$ .*

Nous prendrons le plan du premier faisceau comme plan des  $(\lambda\alpha\mu)$  et celui du deuxième comme plan des  $(\lambda\alpha\nu)$ . Le sommet commun sera situé en un point fixe  $\lambda = \frac{1}{k}$ .

Tout plan passant par deux rayons homologues déterminera des coordonnées  $\mu$  et  $\nu$  telles que

$$\frac{\lambda}{\mu} = \alpha \quad \text{et} \quad \frac{\lambda}{\nu} = \beta$$

$\lambda$  est connu, puis les valeurs  $\alpha$  et  $\beta$  sont liées par la relation fondamentale (1).

En introduisant ces valeurs on obtient :

$$\left(\frac{\lambda}{\nu}\right)^p F_1^{(n)}\left(\frac{\lambda}{\mu}\right) + \dots + F_{p+1}^{(n)}\left(\frac{\lambda}{\mu}\right) = 0$$



On introduit ces valeurs et on trouve l'équation de la surface, lieu géométrique.

On obtient :

$$\left(\frac{z}{x}\right)^p F_1^{(n)}\left(\frac{z}{y}\right) + \dots + F_{p+1}^{(n)}\left(\frac{z}{y}\right) = 0$$

ou.

$$z^p F_1^{(n)}(yz) + xz^{p-1} F_2^{(n)}(yz) + \dots + x^{p-1} z F_p^{(n)}(yz) + x^p F_{p+1}^{(n)}(yz) = 0.$$

En divisant par  $z^{n+p}$  on trouve :

$$F^{(n+p)}\left(\frac{x}{z}, \frac{y}{z}\right) = 0.$$

Donc la surface est un cône du degré  $(n+p)$ .

Il reste facile de voir analytiquement que les axes des  $x$  et des  $y$  sont des génératrices multiples d'ordre  $n$  et  $p$ .

**COROLLAIRE.** *Quand les faisceaux de plans ont deux plans homologues communs, le cône se ramène à un cône du  $(n+p-1)^e$  degré. La première arête est une génératrice multiple d'ordre  $(n-1)$  et l'autre d'ordre  $(p-1)$ .*

Le plan homologue commun sera pris comme plan des  $xoy$ , et la solution  $\alpha = 0$  devra donner  $\beta = 0$ . Comme pour les courbes par degré du chapitre précédent on aura

$$P_{p+1} = 0.$$

ou

$$\lambda^p F_1^{(n)}(\lambda\mu) + \lambda^{p-1} \nu F_2^{(n)}(\lambda\mu) + \dots + \lambda \nu^{p-1} F_p^{(n)}(\lambda\mu) + \nu^p F_{p+1}^{(n)}(\lambda\mu) = 0.$$

On en tire également :

$$F^{(n+p)}\left(\frac{\mu}{\lambda}, \frac{\nu}{\lambda}\right) = 0.$$

Nous avons donc un cône de la  $(n+p)^e$  classe et, en faisant  $\lambda = \frac{1}{k} = \text{constante}$ , nous trouvons la section par le troisième plan. C'est une courbe de la  $(n+p)^e$  classe d'équation

$$F^{(n+p)}(\mu, \nu) = 0.$$

Il en résulte a priori que le plan  $(\lambda o\mu)$  est tangent multiple d'ordre  $n$  et le plan  $(\lambda o\nu)$  l'est également d'ordre  $p$ .

**COROLLAIRE.** *Quand les deux faisceaux de rayons ont deux rayons homologues communs, la surface enveloppe se ramène à un cône de la  $(n+p-1)^e$  classe. Le plan du premier faisceau est tangent multiple d'ordre  $(n-1)$  et l'autre d'ordre  $(p-1)$ .*

Le rayon homologue commun sera l'axe  $o\lambda$  et la solution  $\mu = \infty$  donnera  $\nu = \infty$  ce qui correspond à

$$\alpha = 0 \quad \text{et} \quad \beta = 0.$$

L'équation du cône donne :

$$z^p F_1^{(n)}(yz) + \dots + x^p (A_{p+1} z^n + B_{p+1} z^{n-1} y + \dots + L_{p+1} z) = 0.$$

On peut sortir  $z$  et l'on a :

$$z = 0$$

$$z^{p-1} F_1^{(n)}(yz) + \dots + x^{p-1} F_p^{(n)}(yz) + x^p F_{p+1}^{(n-1)} = 0$$

on obtient aussi

$$F^{(n-1)}\left(\frac{x}{z}, \frac{y}{z}\right) = 0.$$

Nous avons un cône du  $(n + p - 1)^e$  degré.

Le plan  $z = 0$  s'est détaché de la surface et les arêtes ou les axes  $ox$  et  $oy$  sont des génératrices multiples d'ordre  $(n - 1)$  et  $(p - 1)$ .

Ceci se démontre en menant des plans sécants du cône par ces axes.

De même que pour les développements analogues on a :

$$P_{p+1} = 0.$$

Par analogie nous pouvons écrire pour l'équation de la surface :

$$\lambda^p F_1^{(n)}\left(\frac{\lambda}{\mu}\right) + \lambda^{p-1} \nu F_2^{(n)}\left(\frac{\lambda}{\mu}\right) + \dots + \lambda \nu^{p-1} F_p^{(n)}\left(\frac{\lambda}{\mu}\right) + \nu^p \frac{\lambda}{\mu} F_{p+1}^{(n-1)}\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)$$

ou en multipliant par  $\mu^n$  et en divisant par  $\lambda$

$$\nu^p F_{(p+1)}^{n-1}(\lambda\mu) + \nu^{p-1} F_p^{(n)}(\lambda\mu) + \dots + \lambda^{p-2} \nu F_2^{(n)}(\lambda\mu) + \lambda^{p-1} F_1^{(n)}(\lambda\mu) = 0$$

ou

$$F^{n+p-1}\left(\frac{\mu}{\lambda}, \frac{\nu}{\lambda}\right) = 0.$$

Nous avons également un cône de classe  $(n + p - 1)$ .

Comme tous les plans passant par l'axe  $o\lambda$  correspondent à  $\mu = \infty$  et  $\nu = \infty$ , ils sont tangents et dans ce cas la droite ( $o\lambda$ ) est une génératrice détachée du cône.

En outre les plans  $\lambda o\mu$  et  $\lambda o\nu$  sont tangents multiples d'ordre  $(n - 1)$  et  $(p - 1)$ .

## CONSTRUCTION DES CONES.

1. Etant donné deux faisceaux de plans formant un groupe du  $(n + p)^e$  degré, nous pouvons considérer deux plans homologues coupant les faisceaux.

Ces plans correspondent à deux faisceaux de rayons avec un rayon homologue commun; autrement dit *le cône du  $(n + p)^e$  degré dépend d'un cône de la  $(n + p - 1)^e$  classe régi par le corollaire.*

2. En faisant  $p = 1$ , on a des groupes du  $(n + 1)^e$  degré, et les cônes correspondants dépendent de cônes auxiliaires de la  $n^e$  classe. De la même manière que nous avons montré que les courbes de cette nature se ramenaient par une alternance de classes et de degrés jusqu'à des coniques nous pouvons établir la même loi pour les cônes et dire :

*Un cône du  $(n + 1)^e$  degré avec une génératrice multiple d'ordre  $n$  se ramène à un cône de la  $n^e$  classe avec un plan tangent multiple d'ordre  $n - 1$ .*

La transformation dualistique est applicable à ce dernier cône et en procédant comme dans les courbes, nous dirons :

*La construction d'un cône du  $(n + 1)^e$  degré se ramène à celle d'un cône du deuxième degré ou de la deuxième classe.*

3. THÉORÈME. *Quand une génératrice multiple d'ordre  $(n - 1)$  d'un cône du  $n^e$  degré est considérée comme arête d'un faisceau de plans formant une involution*

1. Etant donné deux faisceaux de rayons formant un groupe de la  $(n + p)^e$  classe, nous pouvons considérer deux rayons homologues et les joindre par des plans avec tous les autres rayons des faisceaux. On forme ainsi deux faisceaux de plans avec un plan homologue commun donnant un groupe du  $(n + p)^e$  degré dépendant du corollaire. En d'autres termes : *Un cône de la  $(n + p)^e$  classe dépend d'un cône auxiliaire du  $(n + p - 1)^e$  degré régi par le corollaire.*

2. Avec  $p = 1$  les cônes auxiliaires sont du  $n^e$  degré. Il est évident que les développements connus pour les courbes sont applicables aux cônes et nous avons :

*Un cône de la  $(n + 1)^e$  classe avec un plan tangent multiple d'ordre  $n$  se ramène à un cône du  $n^e$  degré avec une génératrice multiple d'ordre  $n - 1$ .*

Ce cône est évidemment dépendant d'un autre comme nous l'avons vu dans les courbes et par une succession de transformations nous pouvons remonter à un cône du deuxième degré ou de la deuxième classe.

3. THÉORÈME. *Si dans un plan tangent multiple d'ordre  $(n - 1)$  d'un cône de la  $n^e$  classe nous considérons une involution de rayons de degré  $n$  ayant le som-*

du  $n^{\circ}$  degré, les lignes d'intersection des  $n$  plans homologues avec le cône sont dans un même plan, et les plans correspondant à chaque groupe de  $n$  plans de l'involution passent par une même arête commune.

La démonstration de ce théorème découle, *a priori*, du théorème des cônes, du  $(n + p)^{\circ}$  degré.

4. Les cônes du  $4^{\circ}$  degré avec deux générations doubles dépendent d'un cône auxiliaire de la troisième classe donné par neuf plans tangents.

La construction de ce cône peut être déduite directement de la construction que nous avons indiquée pour les courbes de la  $3^{\circ}$  classe par neuf tangentes.

met du cône comme centre, les plans tangents du cône issus des  $n$  rayons homologues d'un même groupe passent par une arête commune et les arêtes relatives aux différents groupes de rayons sont situées dans un même plan.

La démonstration de ce théorème découle du théorème général des cônes de la  $(n + p)^{\circ}$  classe.

4. Les cônes de la  $4^{\circ}$  classe avec deux plans tangents multiples d'ordre deux, dépendent d'un cône auxiliaire du troisième degré donné par neuf génératrices.

La construction de ce cône est analogue à la construction que nous avons indiquée pour les courbes du  $3^{\circ}$  degré par neuf points.

### III

#### Surfaces réglées du $(n + p)^{\circ}$ degré.

Deux faisceaux de plans dont les arêtes ne sont pas situées dans un même plan peuvent également former un groupe du  $(n + p)^{\circ}$  degré. Dans ce cas, tout plan du premier faisceau correspond à  $p$  du deuxième et tout plan du deuxième à  $n$  du premier.

THÉORÈME. — *Le lieu géométrique des lignes d'intersection des plans homologues de deux faisceaux de plans dont les arêtes ne sont pas dans un plan et qui forment un groupe du  $(n + p)^{\circ}$  degré est une surface réglée du  $(n + p)^{\circ}$  degré. La première arête est une ligne multiple de la surface, d'ordre  $n$  et la deuxième une d'ordre  $p$ .*

Nous pouvons prendre une des arêtes comme *axe* des  $x$  et la deuxième comme étant située dans le plan  $yo z$ .

Les plans du premier faisceau auront comme équation :

$$z = \alpha y .$$

Si maintenant nous posons comme équations de la deuxième arête :

$$\begin{aligned} k_1 y + k_2 z + k_3 &= 0 \\ x &= 0 , \end{aligned}$$

tout plan passant par cette droite aura pour équation :

$$\beta x + k_1 y + k_2 z + k_3 = 0 .$$

Les valeurs  $k_1, k_2, k_3$  sont des constantes qui définissent l'arête, tandis que  $\alpha$  et  $\beta$  sont les paramètres variables qui donnent les plans homologues.

$\alpha$  et  $\beta$  sont liés par l'équation (1). En tirant leurs valeurs des équations que nous avons et en les introduisant dans l'équation (1) nous obtiendrons évidemment le lieu géométrique cherché.

On a :

$$\begin{aligned} \alpha &= \frac{z}{y} \\ \beta &= - \frac{k_1 y + k_2 z + k_3}{x} \end{aligned}$$

On obtient ensuite :

$$\begin{aligned} \left(\frac{-1}{x}\right)^p (k_1 y + k_2 z + k_3)^p F_1^{(n)}\left(\frac{z}{y}\right) + \dots + \left(\frac{-1}{x}\right) (k_1 y + k_2 z + \\ k_3) F_p^{(n)}\left(\frac{z}{y}\right) + F_{p+1}^{(n)}\left(\frac{z}{y}\right) = 0 \end{aligned}$$

ou

$$\begin{aligned} x^p F_{p+1}^{(n)}(yz) + x^{p-1} (-k_1 y - k_2 z - k_3) F_p^{(n)}(yz) + \dots + \\ (-k_1 y - k_2 z - k_3)^p F_1^{(n)}(yz) = 0 \end{aligned}$$

Cette équation correspond à une surface du  $(n + p)^\circ$  degré. La surface étant engendrée par une droite qui se meut en

restant dans deux plans homologues, elle est bien une surface réglée. D'autre part tout plan passant par l'axe  $ox$

$$z = my \quad \text{ou} \quad \frac{z}{y} = m = \text{constante}$$

donne comme intersection avec la surface :

$$x^p \cdot A + x^{p-1}(My + N) B + x^{p-2}(My + N)^2 C + \dots + \\ (My + N)^p \cdot I = 0$$

Il en résulte que l'axe est une droite multiple d'ordre  $n$  et l'on démontrerait de la même manière que la droite  $k_1y + k_2z + k_3 = 0$  est une droite multiple d'ordre  $p$ .

L. CRELIER (Bienne).

## SUR LES DÉMONSTRATIONS EN GÉOMÉTRIE DESCRIPTIVE

On n'a pas l'habitude, pour démontrer les théorèmes qui appartiennent spécialement à la Géométrie descriptive, de recourir aux moyens fournis par cette dernière.

On s'impose ainsi des considérations inutilement compliquées et on méconnaît le but général de cette science, au moment même de la développer. Les démonstrations suivantes de trois théorèmes, dont deux sont bien connus et le troisième peut-être *nouveau*, montreront l'avantage de faire autrement. Cette manière de procéder placerait la Géométrie descriptive à doubles projections naturellement avant la méthode des plans cotés, contrairement à ce que suppose le programme officiel des lycées de France.

THÉORÈME I. — *Pour que deux droites AB, CD, soient perpendiculaires, il faut et il suffit qu'il en soit ainsi de leurs*