II

Cônes du (n + p)e degré.

Deux faisceaux de plans dont les arêtes ont un point commun peuvent former un *groupe du* (n + p)e *degré* dans les mêmes conditions que deux faisceaux de droites. Un plan du premier correspond à p du deuxième et un de celui-ci à n du premier.

Théorème. *Le lieu géométrique des lignes d'intersection des plans homologues de deux faisceaux de plans d'un groupe du* (n + p)e *degré est un cône du* (n + p)e *degré. L'arête du premier faisceau est une génératrice multiple d'ordre* n *et celle de l'autre une d'ordre* p.

Dans un système de trois axes nous considèrerons l'axe des x comme arête du premier faisceau et celui des y comme arête du second.

Les équations des plans du premier faisceau seront de la forme

$$z = \alpha y .$$

Celles des plans de l'autre :

$$z = \beta x .$$

Les valeurs α et β sont liées par l'équation (1) du chapitre précédent, de telle manière que toute valeur de β en donne n de α et une de α en donne p de β.

On a :

$$\alpha = \frac{z}{y} \quad \text{et} \quad \beta = \frac{z}{x} .$$

Cônes de la (n + p)e classe.

Deux faisceaux de rayons situés chacun dans un plan et ayant les sommets communs forment un groupe de la $(n + p)^e$ classe quand, à tout rayon du premier en correspondent p du deuxième et à tout rayon du deuxième n du premier.

Théorème. *L'enveloppe des plans passant par deux rayons homologues de deux faisceaux formant un groupe de la* (n + p)e *classe est un cône de la* (n + p)e *classe. Le plan du premier faisceau est un plan tangent multiple d'ordre* n *et l'autre un plan tangent multiple d'ordre* p

Nous prendrons le plan du premier faisceau comme plan des $(\lambda o \mu)$ et celui du deuxième comme plan des $(\lambda o \nu)$. Le sommet commun sera situé en un point fixe $\lambda = \frac{1}{k}$.

Tout plan passant par deux rayons homologues déterminera des coordonnées μ et ν telles que

$$\frac{\lambda}{\mu} = \alpha \quad \text{et} \quad \frac{\lambda}{\nu} = \beta$$

λ est connu, puis les valeurs α et β sont liées par la relation fondamentale (1).

En introduisant ces valeurs on obtient :

$$\left(\frac{\lambda}{\nu}\right)^p F_1^{(n)}\left(\frac{\lambda}{\mu}\right) + \ldots + F_{p+1}^{(n)}\left(\frac{\lambda}{\mu}\right) = 0$$

On introduit ces valeurs et on trouve l'équation de la surface, lieu géométrique.

On obtient :

$$\left(\frac{z}{x}\right)^p F_1^{(n)}\left(\frac{z}{y}\right) + \ldots +$$

$$F_{p+1}^{(n)}\left(\frac{z}{y}\right) = 0$$

ou.

$$z^p F_1^{(n)}(yz) + xz^{p-1}F_2^{(n)}(yz) + \ldots$$

$$+ x^{p-1}z F_p^{(n)}(yz) +$$

$$x^p F_{p+1}^{(n)}(yz) = 0 .$$

En divisant par z^{n+p} on trouve :

$$F^{(n+p)}\left(\frac{x}{z}, \frac{y}{z}\right) = 0 .$$

Donc la surface est un cône du degré $(n + p)$.

Il reste facile de voir analytiquement que les axes des x et des y sont des génératrices multiples d'ordre n et p.

Corollaire. *Quand les faisceaux de plans ont deux plans homologues communs, le cône se ramène à un cône du* $(n + p - 1)^e$ *degré. La première arête est une génératrice multiple d'ordre* $(n - 1)$ *et l'autre d'ordre* $(p - 1)$.

Le plan homologue commun sera pris comme plan des xoy, et la solution $\alpha = 0$ devra donner $\beta = 0$. Comme pour les courbes par degré du chapitre précédent on aura

$$P_{p+1} = 0 .$$

ou

$$\lambda^p F_1^{(n)}(\lambda\mu) + \lambda^{p-1}\nu F_2^{(n)}(\lambda\mu) + \ldots$$

$$+ \lambda\nu^{p-1} F_p^{(n)}(\lambda\mu) +$$

$$\nu^p F_{p+1}^{(n)}(\lambda\mu) = 0 .$$

On en tire également :

$$F^{(n+p)}\left(\frac{\mu}{\lambda}, \frac{\nu}{\lambda}\right) = 0 .$$

Nous avons donc un cône de la $(n + p)^e$ classe et, en faisant $\lambda = \frac{1}{k}$ = constante, nous trouvons la section par le troisième plan. C'est une courbe de la $(n + p)^e$ classe d'équation

$$F^{(n+p)}(\mu, \nu) = 0 .$$

Il en résulte a priori que le plan $(\lambda o \mu)$ est tangent multiple d'ordre n et le plan $(\lambda o v)$ l'est également d'ordre p.

Corollaire. *Quand les deux faisceaux de rayons ont deux rayons homologues communs, la surface enveloppe se ramène à un cône de la* $(n + p - 1)^e$ *classe. Le plan du premier faisceau est tangent multiple d'ordre* $(n - 1)$ *et l'autre d'ordre* $(p - 1)$.

Le rayon homologue commun sera l'axe $o\lambda$ et la solution $\mu = \infty$ donnera $\nu = \infty$ ce qui correspond à

$$\alpha = 0 \quad \text{et} \quad \beta = 0 .$$

L'équation du cône donne :

$$z^p F_1^{(n)}(yz) + \dots + x^p \Big(A_{p+1} z^n + B_{p+1} z^{n-1} y + \dots + L_{p+1} z \Big) = 0 .$$

On peut sortir z et l'on a :

$$z = 0$$

$$z^{p-1} F_1^{(n)}(yz) + \dots + x^{p-1} F_p^{(n)}(yz) + x^p F_{p+1}^{(n-1)} = 0$$

on obtient aussi

$$F^{(n-1)}\left(\frac{x}{z}, \frac{y}{z}\right) = 0 .$$

Nous avons un cône du $(n + p - 1)^e$ degré.

Le plan $z = 0$ s'est détaché de la surface et les arêtes ou les axes ox et oy sont des génératrices multiples d'ordre $(n - 1)$ et $(p - 1)$.

Ceci se démontre en menant des plans sécants du cône par ces axes.

De même que pour les développements analogues on a :

$$P_{p+1} = 0 .$$

Par analogie nous pouvons écrire pour l'équation de la surface :

$$\lambda^p F_1^{(n)}\left(\frac{\lambda}{\mu}\right) + \lambda^{p-1} \nu F_2^{(n)}\left(\frac{\lambda}{\mu}\right) + \dots + \lambda \nu^{p-1} F_p^{(n)}\left(\frac{\lambda}{\mu}\right) + \nu^p \frac{\lambda}{\mu} \overset{1}{F}{}_{p+1}^{(n-1)}\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)$$

ou en multipliant par μ^n et en divisant par λ

$$\nu^p \overset{1}{F}{}^{n-1}_{(p+1)}(\lambda\mu) + \nu^{p-1} F_p^{(n)}(\lambda\mu) + \dots + \lambda^{p-2} \nu F_2^{(n)}(\lambda\mu) + \lambda^{p-1} F_1^{(n)}(\lambda\mu) = 0$$

ou

$$F^{n+p-1}\left(\frac{\mu}{\lambda}, \frac{\nu}{\lambda}\right) = 0 .$$

Nous avons également un cône de classe $(n + p - 1)$.

Comme tous les plans passant par l'axe $o\lambda$ correspondent à $\mu = \infty$ et $\nu = \infty$, ils sont tangents et dans ce cas la droite $(o\lambda)$ est une génératrice détachée du cône.

En outre les plans $\lambda o \mu$ et $\lambda o \nu$ sont tangents multiples d'ordre $(n - 1)$ et $(p - 1)$.

Construction des cones.

1. Etant donné deux faisceaux de plans formant un groupe du $(n + p)^e$ degré, nous pouvons considérer deux plans homologues coupant les faisceaux.

Ces plans correspondent à deux faisceaux de rayons avec un rayon homologue commun; autrement dit *le cône du* $(n + p)^e$ *degré dépend d'un cône de la* $(n + p - 1)^e$ *classe régi par le corollaire.*

2. En faisant $p = 1$, on a des groupes du $(n + 1)^e$ degré, et les cônes correspondants dépendent de cônes auxiliaires de la n^e classe. De la même manière que nous avons montré que les courbes de cette nature se ramenaient par une alternance de classes et de degrés jusqu'à des coniques nous pouvons établir la même loi pour les cônes et dire :

Un cône du $(n + 1)^e$ *degré avec une génératrice multiple d'ordre* n *se ramène à un cône de la* n^e *classe avec un plan tangent multiple d'ordre* $n - 1$.

La transformation dualistique est applicable à ce dernier cône et en procédant comme dans les courbes, nous dirons :

La construction d'un cône du $(n + 1)^e$ *degré se ramène à celle d'un cône du deuxième degré ou de la deuxième classe.*

3. Théorème. *Quand une génératrice multiple d'ordre* $(n - 1)$ *d'un cône du* n^e *degré est considérée comme arête d'un faisceau de plans formant une involution*

1. Etant donné deux faisceaux de rayons formant un groupe de la $(n + p)^e$ classe, nous pouvons considérer deux rayons homologues et les joindre par des plans avec tous les autres rayons des faisceaux. On forme ainsi deux faisceaux de plans avec un plan homologue commun donnant un groupe du $(n + p)^e$ degré dépendant du corollaire. En d'autres termes : *Un cône de la* $(n + p)^e$ *classe dépend d'un cône auxiliaire du* $(n + p - 1)^e$ *degré régi par le corollaire.*

2. Avec $p = 1$ les cônes auxiliaires sont du n^e degré. Il est évident que les développements connus pour les courbes sont applicables aux cônes et nous avons :

Un cône de la $(n + 1)^e$ *classe avec un plan tangent multiple d'ordre* n *se ramène à un cône du* n^e *degré avec une génératrice multiple d'ordre* $n - 1$.

Ce cône est évidemment dépendant d'un autre comme nous l'avons vu dans les courbes et par une succession de transformations nous pouvons remonter à un cône du deuxième degré ou de la deuxième classe.

3. Théorème. *Si dans un plan tangent multiple d'ordre* $(n - 1)$ *d'un cône de la* n^e *classe nous considérons une involution de rayons de degré* n *ayant le som-*

du n^e *degré, les lignes d'intersection des* n *plans homologues avec le cône sont dans un même plan, et les plans correspondant à chaque groupe de* n *plans de l'involution passent par une même arête commune.*

La démonstration de ce théorème découle, *a priori*, du théorème des cônes, du $(n + p)^e$ degré.

4. Les cônes du 4^e degré avec deux générations doubles dépendent d'un cône auxiliaire de la troisième classe donné par neuf plans tangents.

La construction de ce cône peut être déduite directement de la construction que nous avons indiquée pour les courbes de la 3^e classe par neuf tangentes.

met du cône comme centre, les plans tangents du cône issus des n *rayons homologues d'un même groupe passent par une arête commune et les arêtes relatives aux différents groupes de rayons sont situées dans un même plan.*

La démonstration de ce théorème découle du théorème général des cônes de la $(n + p)^e$ classe.

4. Les cônes de la 4^e classe avec deux plans tangents multiples d'ordre deux, dépendent d'un cône auxiliaire du troisième degré donné par neuf génératrices.

La construction de ce cône est analogue à la construction que nous avons indiquée pour les courbes du 3^e degré par neuf points.

III

Surfaces réglées du $(n + p)^e$ degré.

Deux faisceaux de plans dont les arêtes ne sont pas situées dans un même plan peuvent également former un groupe du $(n + p)^e$ degré. Dans ce cas, tout plan du premier faisceau correspond à p du deuxième et tout plan du deuxième à n du premier.

Théorème. — *Le lieu géométrique des lignes d'intersection des plans homologues de deux faisceaux de plans dont les arêtes ne sont pas dans un plan et qui forment un groupe du* $(n + p)^e$ *degré est une surface réglée du* $(n + p)^e$ *degré. La première arête est une ligne multiple de la surface, d'ordre* n *et la deuxième une d'ordre* p.

Nous pouvons prendre une des arêtes comme *axe* des x et la deuxième comme étant située dans le plan yoz.