ERNEST CESÀRO 1859-1906

Autor(en): **Alasia, C.**

Objekttyp: **Obituary**

Zeitschrift: **L'Enseignement Mathématique**

Band (Jahr): **9 (1907)**

Heft 1: **L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE**

PDF erstellt am: **13.09.2024**

Ernest Cesàro

1859-1906

ERNEST CESÀRO

1859-1906

Nec forma aeternum aut cuiquam est fortuna perennis :
Longius aut propius mors sua quemque manet.
Prop., II, 28, 57.

Le 13 septembre 1906, les journaux de Naples annonçaient la mort tragique du savant géomètre Ernest Cesàro, survenue la veille dans une petite ville peu éloignée, où il allait chaque année se reposer des fatigues de l'étude et de l'enseignement. Un de ses fils, Manlio, âgé de dix-sept ans, se baignait dans la mer qui était fort agitée, et son père, nageur habile, se déshabillait pour le rejoindre, quand tout à coup une vague impétueuse surprit le jeune homme. Son père voulut se jeter à son secours, mais en descendant l'escalier il glissa si malheureusement qu'il tomba dans l'eau après s'être fait des contusions à la tête et à la poitrine. Les bateliers accoururent bientôt, mais ils ne ramenèrent qu'un mourant, tandis que le cadavre de Manlio fut retrouvé le lendemain. On comprend la douleur de la femme et des autres fils de M. Cesàro qui avaient été spectateurs impuissants de cette pénible tragédie. Telle fut la catastrophe qui en quelques minutes priva la famille Cesàro de son seul soutien et qui arracha à la science une de ses gloires les plus illustres et à l'Italie un citoyen dont elle était justement fière.

La science et la famille furent le double but et l'idéal de la vie de Cesàro : à l'une il voua toutes les énergies de son puissant esprit ; à l'autre il se sacrifia lui-même. Qui donc plus que lui peut avoir droit à l'adoration des siens, à l'admiration et à la reconnaissance des amis de la science ?

Il fut un de ces rares hommes privilégiés que nous sommes contraints à admirer dans les productions de leur belle intelligence et à aimer pour eux-mêmes. Modeste et courtois avec tout le monde, loyal jusqu'au scrupule et toujours disposé à voir le bien plutôt que le mal dans les actions humaines, à secourir de son argent un pauvre et de ses conseils tous ceux qui s'adressaient à lui, il sut se faire des amis et des admirateurs de tous ceux qui eurent la bonne fortune de l'approcher ou d'entrer en relations avec lui. Par les qualités de son esprit et de son cœur, ainsi que par ses œuvres, il fit preuve des vertus qui appartiennent aux grands hommes dont une nation a le droit de se montrer fière et le devoir d'en perpétuer le souvenir et l'exemple.

Dans un de ses éloges académiques [1] J. Bertrand a dit : « Les travaux d'un homme de science sont une trop grande part de sa vie pour que l'on puisse séparer les deux souvenirs et c'est dans un même récit que leurs histoires se déroulent et s'expliquent, qu'elles s'éclairent mutuellement en s'unissant, sans se confondre, dans une mesure qu'un vain caprice ne saurait régler ». Mais ce récit devient trop difficile lorsqu'il s'agit d'un savant comme M. Cesàro, c'est-à-dire d'un savant dont la production scientifique est non seulement extraordinairement abondante, mais surtout grandement variée et je ne crois pas qu'il serait possible à quelqu'un de parler de sa vie en jetant un coup d'œil d'ensemble sur ses travaux. On devra toujours ou les examiner un à un, ce qui sera bien long, ou se contenter d'en mentionner quelques-uns parmi les plus intéressants ou les plus récents, et c'est ce que je tâcherai de faire.

Ernest Cesàro naquit à Naples le 12 mars 1859, mais sa vraie patrie est la petite ville de Torre Annunziata qui, s'appuyant pittoresquement sur les derniers contre-forts du Vésuve, baigne ses pieds dans l'eau du Tirrène : c'est dans cette ville que toute sa famille est née et a toujours demeuré. Son père Louis, homme d'affaires, et sa mère, Fortunia Nunziante, ayant dû se rendre à Naples pour quelques mois, Ernest y naquit. Son enfance fut comme celle de la plupart

[1] *Eloge historique de Le Verrier.*

des hommes : elle s'écoula tranquillement au milieu de l'affection de ses parents et de la sympathie de ses maîtres qui se complaisaient de la vivacité de son esprit et de la noblesse de son cœur. Agé de neuf ans il voulut entrer dans le séminaire de Nola au lieu de suivre ses frères dans un collège de Naples, et son père, croyant peut-être à une vocation, y consentit volontiers. Il en sortit deux ans après pour aller fréquenter le Gymnase « Victor Emanuel » de Naples, où il étudia pendant quatre ans; mais au bout de ce temps, comme il préféra renoncer à l'étude des langues mortes, son père l'envoya à Liège où, depuis plusieurs années, demeurait son frère Joseph, actuellement professeur ordinaire de Minéralogie et Cristallographie à l'Université de cette ville. S'étant inscrit à l'*Ecole des Mines*, il étudia avec ardeur en récoltant beaucoup d'éloges ; il montra une grande prédilection pour la mathématique et ses applications, prédilection qui s'affirmait de jour en jour, surtout par les encouragements de ses maîtres, et en particulier du savant professeur Catalan qui préconisait dans le jeune italien une des gloires de la science. Mais cet éminent géomètre fit encore plus : pour témoigner à son jeune élève tout l'intérêt qu'il concédait à son talent et à son assiduité, il permit que plusieurs de ses Notes de mathématique parussent dans la *Nouvelle Correspondance Mathématique,* la savante Revue qu'il dirigeait[1] (Bruxelles, 1874-1880). Ce sont sept courtes recherches sur des sujets différents[2] où on découvre déjà une facilité peu commune d'assimilation et un esprit surprenant de pénétration uni à une intuition toute particulière des applications à la fois intéressantes et peu prévues. Aussi la nouvelle revue *Mathesis*, qui succéda à la *Nouvelle Correspondance*, accueillit dès ses premières pages les nombreux écrits de M. Cesàro, et dans les seize volumes publiés depuis le jour de sa fondation nous y retrouvons une succession de plus

---

[1] La publication de cette revue cessa en 1880 : elle fut reprise en 1881 par MM. J. Neuberg et P. Mansion sous le titre de *Mathesis*.

[2] Je reproduis les titres des sept notes, presque ignorées de la plupart : 1. *Sur l'existence de certains polyèdres.* — 2. *Propriétés d'une courbe.* — 3. *Sur les formes approchées des solides d'égale résistance.* — 4. *Une question de maximum traitée par Poncelet,* — 5. *Sur la série harmonique.* — 6. *Démonstration de la formule de Stirling.* — 7. *Quelques formules.*

de cinquante articles signés par M. Cesàro ; ils sont tous d'un grand intérêt et vont des théories géométriques élémentaires aux applications de l'Analyse, de la théorie des nombres au calcul symbolique, de la doctrine des probabilités à la géométrie différentielle. Quelqu'un a fait remarquer dans le compte rendu d'un Mémoire de M. Cesàro, publié en 1884, que les sujets traités par lui ne sont pas tous nouveaux ou n'ont pas tous de l'originalité dans les applications, leur nombre étant au préjudice de la valeur. Mais j'observe à ce propos le fait remarquable qu'avec les années l'importance de sa production scientifique est allée en augmentant d'une manière extraordinaire sans que la variété des sujets ait subi aucune diminution. La vivacité naturelle de son caractère se réfléchissait sur ses recherches, surtout pendant les premières années de sa carrière scientifique ; mais la méthode par laquelle chaque question y est traitée est toujours personnelle et possède une empreinte propre d'originalité et de largeur de conception suffisantes à leur assurer la plus haute valeur. Les démonstrations complétement neuves et les applications très ingénieuses des théorèmes de Berger, de Fouet, de Jamet, d'Appell, etc., pour ne parler que des notes insérées dans *Mathesis,* en donnent une preuve convaincante. D'ailleurs il aurait suffi d'un travail tel que celui qu'il consacra en 1883 à l'arithmétique asymptotique, et qu'il fit paraître sur les encouragements de Catalan, sous le titre *Sur diverses questions d'arithmétique* dans les *Mémoires de l'Académie des Sciences de Liège,* pour lui assurer d'une manière incontestable la renommée de mathématicien profond et original.

Admirateur enthousiaste d'Hermite, qui avait hérité de Gauss et Cauchy le sceptre de l'analyse, Ernest Cesàro étudiait avec ardeur les théories géométriques et, au premier rang de ses désirs, il plaçait celui de se rendre à Paris pour écouter les leçons d'Hermite, comme aussi celles des grands maîtres, MM. Darboux, Serret, Briot, Bouquet et Chasles qui avait fait de la géométrie un art et une science, — *Mathesis ars et Scientia dicenda* — Son rêve fut bientôt satisfait : il quitta Liège avec le fils du Prince de Soisson son ami, et il s'en alla à Paris où pendant plusieurs mois il put étudier à la Sorbonne. Et là aussi il sut attirer l'attention de ses maîtres sur son esprit puissant et sur sa volonté tenace d'aborder les questions de haute science dont la vision lointaine l'attirait. Hermite l'aimait et encourageait ses aspirations; dans les leçons de M. Darboux il trouvait les fondements de la géométrie intrinsèque à laquelle il aurait associé plus tard son nom; ses nombreux travaux qu'il communiquait à M. Catalan montraient les gigantesques progrès qu'il faisait dans la voie difficile sur laquelle il avait voulu s'acheminer.

Mais les mauvais jours allaient commencer pour lui: la banqueroute de plusieurs maisons de commerce qui avait jeté sa famille dans la cruelle nécessité de sacrifier la meilleure partie de son patrimoine avait mis celle-ci dans l'impossibilité de le laisser à Paris. La mort de son père dont le cœur n'avait su résister aux chocs des adversités aurait porté le coup fatal aux aspirations du jeune mathématicien si des hommes aussi généreux que grands n'étaient allés à son secours. M. Catalan aimait toujours son ancien élève qui, en attendant, était rentré à Liège; MM. Hermite, Neuberg et Mansion ne voulaient abandonner le jeune homme auquel souriait un avenir aussi brillant; ils eurent l'idée d'écrire au professeur Cremona dont le bon cœur était bien connu. Celui-ci accepta de contribuer à cette bonne action et en parla à M. Nicolas S. Dino, en ce moment-là professeur à la Faculté des Sciences de Rome, actuellement à celle de Náples. Egalement originaire de Torre Annunziata, où il est grandement aimé, le professeur S. Dino obtint pour le jeune Cesàro ce qui lui était nécessaire pour compléter ses études. Dans la lettre qu'il adressa au Conseil municipal de sa ville natale, il disait entre autres choses [1]: «..... *et il serait faute impardonnable que de l'abandonner à lui-même : c'est une force qui ne doit pas être perdue. — S'il persévère dans la voie longue et pénible des études sévères et bien ordonnées, il*

[1] Ce passage de la lettre de M. Dini au Conseil municipal de Torre Annunziata m'a été communiqué par M. le professeur Servillo, directeur de l'Ecole technique de cette ville et qui a été élève de M. Cesàro.

fera honneur à notre nation. — Sur son compte M. le Prof. Catalan de Liège, dans une lettre adressée à un illustre personnage (M. le Prof. Cremona) *de cette Université* (Rome) *et datée 13 juin 1883 s'exprimait dans ces termes : Il y a un mois, sans connaître Gauss, M. Cesàro a inventé une définition de la fonction* Γ *différente de celle de Gauss, mais qui s'accorde avec celle-ci. Ce jeune homme, s'il vit, sera un très grand géomètre* ». — Et cette même année Hermite exposait dans son Cours d'Analyse à la Sorbonne des formules très intéressantes qui avaient été construites par le jeune M. Cesàro.

La demande de M. S. Dino avait été acceptée à l'unanimité ; le 8 février 1883 le Conseil Municipal attribuait à M. Cesàro un secours de trois mille francs pour qu'il pût compléter à Liège, à l'*Ecole des Mines*, les études qu'il avait commencées avec tant de succès. Mais cela ne devait pas s'accomplir, car, vers la fin de cette même année, il rentra en Italie afin de passer les deux dernières années de cours à l'Université de Rome et d'y prendre son doctorat en mathématiques. L'influence des savantes leçons de MM. Cremona, Cerruti, Battaglini et des autres excellents maîtres qui enseignaient la géométrie supérieure, la mécanique, l'analyse dans cette Université, se fit sentir dans les travaux qu'il fit à Rome ; mais là, comme dans la plupart des travaux qui suivront, on retrouve l'influence d'Hermite. Ainsi par exemple dans ses recherches sur la théorie des séries, où, au lieu de rester circonscrit à la seule méthode des séries entières, comme on avait fait dans les plus anciennes recherches, il se mit hardiment sur les traces d'Hermite, en appelant à son aide toutes les ressources qui peuvent être fournies par les méthodes données par Cauchy. M. Cesàro parvint ainsi en peu de temps à donner à cette doctrine une brièveté et une élégance incomparables. Mais c'est surtout dans ses travaux sur la théorie des nombres, sa branche préférée, que l'on remarque le plus l'influence très vive du savant géomètre français, et il ne pourrait en être autrement. Les méthodes générales introduites par ce savant géomètre ont ouvert dans cette théorie des horizons si nouveaux que pour beaucoup de temps encores elles constitueront un puissant instrument de recherches ; il est donc naturel qu'après les premiers travaux d'Hermite, tous ceux qui se sont occupés de la théorie des formes, et parmi eux aussi M. C. Jordan dans son classique Mémoire [1] sur l'équivalence des formes, aient ressenti vivement son influence.

Le merveilleux principe de la réduction continue s'adapte aujourd'hui aussi aux intéressantes recherches sur la théorie de certaines fonctions uniformes. M. Cesàro ne négligeait aucune occasion pour montrer combien d'importance il donnait à cette branche des mathématiques ; encore récemment, dans une de ses précieuses lettres, il me faisait mélancoliquement remarquer comme cette théorie, que Dirichlet appelle la reine des mathémathiques, est négligée, même en Italie, où pourtant elle a des traditions glorieuses. Ce chagrin est encore plus justifié lorsqu'on réfléchit comme l'introduction de cette branche dans la théorie des fonctions donnera beaucoup de force à ceux qui seront maîtres des principes de l'arithmétique supérieure, et que certaines recherches communes à l'arithmétique et à l'analyse des fonctions pourraient donner [2] dès à présent une belle moisson de résultats de la plus grande importance. Du reste, on sait bien que M. Hermite avait dit qu'il n'aurait jamais pu écrire son célèbre Mémoire sur la transformation des fonctions abeliennes s'il n'avait pas été très familier avec les questions de l'arithmétique.

Le volume XIII de la 2me série (1884) des *Annali di Matematica pura ed applicata*, de MM. Brioschi et Cremona, contiennent neuf Mémoires très intéressants de M. Cesàro sur les différentes branches de l'arithmétique : c'est le fruit de longues recherches, et certaines théories qui y sont à peine signalées pourraient avantageusement servir de base à de nouvelles et utiles recherches. Il a réuni ces neuf Mémoires dans un même volume pour le dédier à M. S.-N. Dino, en

---

[1] E. Picard. *L'œuvre scientifique de Ch. Hermite.* — Dans les Annales de l'Ec. norm. sup., sér. 3e, vol. XVIII, 1901.

[2] Ibid.

témoignage de reconnaissance, sous le titre d'*Excursions arithmétiques à l'infini* (Paris, Hermann, 1885). Il attribua toujours une grande importance au résultat contenu dans ce volume et plusieurs études qu'il aborda dans les années suivantes ont là leur fondement. Rappelons entr'autres celui [1] qui a pour objet la série

$$\mathrm{L}(x) = \frac{x}{1-x} + \frac{x^2}{1-x^2} + \dots$$

en ce qui concerne la manière dont elle se comporte dans le voisinage de l'unité; M. Cesàro a pu déduire l'expression asymptotique du nombre $\Theta\ (n)$ des diviseurs de n et établir une formule beaucoup plus générale que celles de Gauss et de Dirichlet.

Ces mêmes résultats contiennent le fondement de ses recherches sur certaines séries de puissances[2] et, en particulier, ses observations [3] sur la formule arithmétique de M. Pervouchine

$$\frac{\mathrm{P}_n}{n} = \log n + \log\log n - 1 - \frac{5}{12 \log n} + \frac{1}{24 \log\log n},$$

(P_n est le n^{me} nombre premier) dont il démontre l'inexactitude théorique : il lui substitue l'autre plus exacte

$$\frac{\mathrm{P}_n}{n} = \log n + \log\log n - 1 + \frac{\log\log n - 2}{\log n} - \frac{(\log\log n)^2 - 6 \log\log n + 11}{2\,(\log n)^2}.$$

Je veux rappeler encore que pendant sa dernière année d'étude à l'Université de Rome (1885), il publia dans les Mémoires de l'Académie des sciences de Lisbonne une étude très complète sur les formes polyédriques dans tous les espaces (*Forme poliedriche regolari e semiregolari in tutti gli spazi*; in-4° de 75 pages); il la dédia à son maître, le savant professeur Cremona.

Afin de permettre à Cesàro de compléter à son aise ses études, M. De Sanctis, fin lettré et brillant esprit, qui était alors ministre de l'Instruction publique, lui avait obtenu du

---

[1] *La série de Lambert en Arithmétique asymptotique.* Rendiconti della R. Accad. di Napoli, sér. 2°, vol. VII (1893), pages 197-204.

[2] *Sur la détermination asymptotique des séries de puissances.* Ibid., pages 187-195.

[3] *Sur une formule empirique de M. Pervouchine.* Comptes rendus de l'Ac. d. Sc. de Paris, vol. CXIX (1894), pages 848-849.

gouvernement un subside à titre d'encouragement. Mais ses cours universitaires ne furent jamais entièrement complétés : lui qui était si brillant dans toutes les branches des mathématiques, il ne put se résoudre à se plier aux formalités qu'on nomme doctorat.

Toutefois, comme en 1886, on avait bannit ses concours à des chaires dans les écoles secondaires et supérieures, encouragé par ses maîtres, il se laissa porter et il fut élu dans toutes les chaires auxquelles il avait concouru et qui sont celles du Lycée Mamiani de Rome, et celles des Universités de Naples, Palerme et Messine. Il choisit Palerme, où il eut le degré de titulaire d'Algèbre supérieure à dater du 1er novembre de cette même année. Peu après, le 22 février 1887, le président de la Faculté des sciences de l'Université de Rome, le grand physicien M. Pierre Blaserna, lui communiquait que, après un beau rapport de M. le prof. Tonelli et par autorisation du ministre de l'Instruction publique, il lui était conféré *ad honorem* le doctorat en mathématiques.

Il demeura à Palerme jusqu'en 1891: en cette même année, il demanda et il obtint de passer à la chaire de calcul infinitésimal dans l'Université de Naples, chaire dont M. le professeur Battaglini était le titulaire, mais qui était restée libre, ce mathématicien ayant passé à l'enseignement de l'Analyse supérieure dans la même Université. Vers le milieu de 1906, il avait demandé d'être transféré à l'Université de Bologne pour y enseigner la Mécanique rationnelle, et il devait s'y rendre au mois de novembre dernier. Les collègues et les étudiants l'auraient vu partir avec beaucoup de chagrin ; d'autres collègues et d'autres étudiants l'attendaient avec impatience. La fatalité cruelle a voulu que les uns et les autres s'associassent dans le deuil et dans la douleur.

Cesàro savait également donner à son enseignement cette empreinte toute personnelle qui caractérise ses écrits et qui le conduisait à généraliser les théories en cherchant les plus belles applications. Ses leçons d'algèbre complémentaire formèrent un cours entièrement différent de celui auquel les étudiants avaient été habitués. Son livre *Corso d'analisi algebrica* (Turin 1894), donne un résumé de ses leçons et un aperçu de la réforme qu'il préconisait pour les études universitaires. C'est dans ce même esprit que sont écrits ses *Elementi di calcolo infinitesimale* (Naples 1897), dont il parut une deuxième édition en 1905, d'après la traduction allemande de M. le Prof. Gerhard KOWALEWSKY, de l'Université de Greifswald. On sait quel est l'accueil qu'ont reçu partout ces leçons, destinées non seulement à ceux qui désirent apprendre les mathématiques supérieures pour s'en servir directement dans les nombreuses applications, mais aussi à ceux qui recherchent avant tout une gymnastique intellectuelle. Il ne voulut jamais s'occuper des critiques plus ou moins intéressées dont il fut l'objet pour ces idées, mais il continua intrépide sa route, bien heureux de se rendre utile aux jeunes étudiants. Dans son cours, comme dans ses livres, il avait soin d'exposer le plus clairement possible les théorèmes généraux dont il donnait la démonstration la plus simple et qu'il faisait suivre d'applications bien appropriées. Il se louait de suivre ainsi les préceptes d'un de ses maîtres [1], qu'il considérait comme insurmontable dans ces qualités d'exposition des théories les plus élevées. Les questions d'importance secondaire il les évitait ; il détestait le luxe d'érudition car il savait qu'elle est préjudiciable aux élèves, tandis qu'il cherchait à développer chez eux l'amour des mathématiques, plutôt que de les éloigner d'elles. Cette méthode devait lui attirer des critiques, mais les méthodes comme les arbres se jugent à leurs fruits, et ils sont bien privilégiés ceux qui peuvent se louer d'avoir eu pour maître le savant Cesàro.

De même qu'il évitait les théories trop élevées, inutiles aux élèves, il évitait les discussions sur les fondements de la science : il respectait, et même à l'occasion il encourageait les discussions sur la philosophie des mathématiques, sans s'y intéresser personnellement. Comme il l'avait dit plus d'une fois, il partageait avec Hermite la croyance un peu mystique sur l'essence du nombre, et avec lui il pensait que les

---

[1] Même peu de jours avant sa mort HERMITE écrivait à une Revue didactique:... *L'admiration, a-t-on dit, est le principe du savoir... ; je m'autoriserai de cette pensée pour exprimer le désir qu'on fasse la part plus large pour les étudiants, aux choses simples et belles, qu'à l'extrême rigueur aujourd'hui si en honneur, mais bien peu attrayante, souvent même fatigante et sans grand profit pour les commençants qui n'en peuvent comprendre l'intérêt.*

nombres forment un monde qui possède sa propre existence hors de nous.

Son enseignement universitaire ne s'arrêta pas à l'algèbre complémentaire et au calcul infinitésimal. Dès sa première année à Palerme il fut chargé de l'enseignement de la Physique mathématique, puis plus tard encore d'autres cours aux Universités de Palerme et de Naples : dans tous ces cours, qu'il développait avec la plus grande compétence et avec une merveilleuse largeur de vues, il apporta des contributions personnelles, répandues ensuite dans de nombreuses publications. Ses Mémoires sur les équations de l'élasticité dans les hyperespaces, sur les formules de Maxwell, sur le pouvoir rotatoire magnétique, sur les dilatations et rotations dans les milieux élastiques, sur la propagation de la chaleur, etc., sont bien connus. Son livre *La teoria matematica dell' elasticità* (in-8° de 214 pages, Turin 1895), qui est presque le résumé de ses cours, montre quelle autorité il aurait apportée dans son enseignement de mécanique rationnelle qu'il devait occuper à Bologne. Il se proposait de publier sous peu, entre autres ouvrages, ses leçons sur la *Teoria matematica del calore* et les *Lezioni sull' idrodinamica* déjà rédigées.

Les soins que M. le Prof. Cesàro porta à l'enseignement ne firent nullement diminuer sa production scientifique ni la variété des sujets : il sembla au contraire qu'en enseignant aux autres il progressait lui-même et que sa culture devenait toujours plus large. Ses contributions à l'étude des fonctions holomorphes, suivant la nouvelle conception de Laguerre, à l'étude des nombres de Bernoulli, à la théorie des roulettes, etc., s'alternent avec les recherches sur la théorie des nombres, sur l'analyse intrinsèque des courbes et des surfaces dans les hyperespaces, sur la théorie des limites, etc. Dans chacun de ses Mémoires, même dans les brefs écrits destinés aux écoliers, il y a toujours du nouveau, soit dans la méthode, soit dans la théorie elle-même. Il me suffit de rappeler comme exemple une petite note[1] d'en-

[1] *Sur une question de limites :* MATHESIS, vol. X (1890), pages 25-28.

viron trois pages insérée dans *Mathesis* et où il donne une nouvelle démonstration du théorème sur les fonctions à une variable entière : *Si pour* n *entier et croissant indéfiniment,* a_n *et* b_n *s'approchent de zéro, on a*

$$\lim \frac{a_n}{b_n} = \lim \frac{a_n - a_{n+1}}{b_n - b_{n+1}}$$

si la deuxième limite existe. Ce théorème bien qu'il soit dû à de l'Hospital, devrait s'appeler *théorème de Cesàro* [1], car il l'a présenté sous une forme toute nouvelle et il l'a fait intervenir dans de nombreuses applications.

Il serait facile de citer d'autres exemples analogues à celui-ci et d'apporter ainsi de nouvelles preuves de l'originalité de la production scientifique du regretté Cesàro. C'est dans chacun de ses écrits qu'on pourrait trouver de ces exemples, et le nombre de ses écrits est assez considérable pour qu'un savant mathématicien ait dit en parlant de Cesàro que c'est *un prodige de précoce activité.* En 1886, lorsqu'il concourut à l'enseignement, le nombre de ses publications surpassait une centaine ; en 1892, c'est-à-dire quand il concourut à la médaille de la Société italienne des sciences (dite *dei XL*), ce nombre avait surpassé deux cents et depuis 1892 à aujourd'hui ce nombre est plus que doublé. Lui-même ne se rappelait pas toutes ses publications, et quand dernièrement il concourut au grand prix royal de l'Académie *dei Lincei,* il fut obligé de demander aux amis et aux bibliothécaires non seulement des exemplaires de ses publications, mais aussi des titres. Si après nous ajoutons à tout cela les nombreuses questions ou solutions de problèmes qu'il envoyait aux Revues, les discussions épistolaires avec de nombreux mathématiciens, les éclaircissements et les conseils qu'il donnait à tous ceux qui s'adressaient à lui, on pourra bien dire que son activité scientifique fut plus que prodigieuse. Chateaubriand et beaucoup d'autres écrivains avant et après lui, ont toujours célébré la précocité du génie mathématique de Pascal, mais sans en donner des preuves ; qu'est-ce qu'on devrait dire de celle de M. Cesàro, qui fut autrement éclatante.

[1] Ce n'est pas moi le premier à manifester cette opinion : elle fut déjà exprimée, je crois, par M. Mansion ou par M. Neuberg.

Comme je l'ai déjà remarqué, le nom de M. Cesàro est associé à une théorie presque neuve à laquelle il a consacré avec enthousiasme toutes les ressources de son grand esprit et qui a fait le sujet non seulement de plusieurs de ses premières recherches, mais aussi de ses derniers et plus importants Mémoires : je veux parler de l'*analyse intrinsèque* qu'il considérait à bon droit comme sa propre création. Une figure géométrique est généralement étudiée soit en la rapportant à des axes fixes, soit en la rapportant à des axes variables. Dans cette dernière méthode la figure considérée dans l'espace est rapportée à un trièdre mobile $Oxyz$ défini par la tangente Ox, la normale principale Oy et la bi-normale Oz en un point variable O de la courbe, et à ces axes sont rapportés les éléments infinitésimaux relatifs à ce point O. Les relations entre ces éléments, c'est-à-dire *les propriétés intrinsèques de la courbe,* s'obtiennent bien plus facilement par cette méthode que par celui des axes fixes. De là, la dénomination d'analyse intrinsèque qu'on a donné à cette méthode.

Dès 1867, M. Darboux fait usage du trièdre mobile comme système d'axes dans son cours professé au Collège de France, puis dans son ouvrage classique sur la théorie des surfaces[1]. Cette même méthode est utilisée après lui par un autre géomètre éminent, M. Ribaucour, dans son *Mémoire sur la théorie générale des surfaces courbes*, couronné[2] en 1876 par l'Académie des sciences de Paris, et postérieurement dans son *Mémoire sur les Elassoïdes ou surfaces à courbure moyenne nulle,* couronné en 1880 par l'Académie royale de Belgique. M. Cesàro qui, dès les premiers moments de ses études mathématiques, guidé par le sens très marqué d'intuition qui lui était propre, avait soudainement prévu les nombreuses ressources que cette méthode devait rendre à celui qui saurait l'appliquer à toutes les branches des sciences mathématiques, se consacra ardemment à cette étude, en coordonnant entre eux les résultats déjà connus

---

[1] *Leçons sur la théorie des surfaces*. 4 vol., in-8°, Paris, 1887-1896.

[2] Ce mémoire ne fut publié qu'en 1891 dans le *Journal de Mathématiques pures et appliquées*.

et en les développant là où c'était nécessaire. Dans ses *Lezioni di geometria intrinseca* (in-8° de 264 pages, Naples, 1896), il sut établir dans un seul corps de doctrine, à une époque où cette méthode n'avait encore guère reçu de publicité, non seulement tout ce qu'il avait pu apprendre des autres, mais aussi, et plus particulièrement, tout ce qui était le fruit de ses recherches personnelles, en joignant avec la plus ingénieuse habileté la théorie aux applications les plus variées. Ces applications vont des courbes usuelles à celles que M. Wölffing a nommées *courbes de M. Cesàro* [1], aux courbes triangulaires, symétriques et harmoniques, et aux congruences linéaires, à propos desquelles il montre comment sa méthode conduit presque intuitivement aux résultats dus par Sturm sur les configurations des normales à une surface dans le voisinage d'un point donné et aux théorèmes bien connus de Hamilton et de Kummer. L'édition allemande de ces *Lezioni* (traduites elles aussi par M. le professeur Kowalewsky et publiées sous le titre *Vorlesungen über natürliche Geometrie*, in-8° de 341 pages, Leipzig, 1901), contient plusieurs nouveaux paragraphes dont quelques-uns présentent une importance toute particulière. Signalons celui qui a été ajouté au chap. III, où sont considérées les courbes dont les cercles osculateurs appartiennent à un même complexe linéaire de cercles, et celui qui a été ajouté au chap. XVI, où il met en évidence la nature différente des espaces suivant que le nombre n de leurs dimensions est pair ou impair : *le lieu d'un point ayant la première, deuxième, troisième, etc., courbures constantes est sphérique ou hélicoïdal, suivant que* n *est un nombre pair ou impair.*

L'analyse intrinsèque forme pour tous ceux qui étudient la géométrie différentielle un instrument très puissant d'investigation et un champ très vaste de recherches, mais dont plusieurs mathématiciens n'ont, jusqu'à ce moment, pas voulu reconnaître la portée, ou n'ont pas su apprécier sa valeur

[1] Ces courbes peuvent se définir comme il suit : le rayon de courbure en un point est proportionnel au segment de normale qui va du point de tangence à son intersection avec la polaire du point de tangence par rapport à un cercle fixe. Lorsque ce cercle se réduit à un point, la courbe devient une spirale sinueuse, et lorsque le cercle se réduit à une ligne droite, le lieu se réduit à la courbe dite *courbe de Ribaucour*.

exacte dans les avantages qu'il présente sur les méthodes classiques de MM. Laguerre, Halphen, Klein, Lie, etc. Mais M. Cesàro, instruit de la haute valeur de sa méthode et persuadé que ses travaux ne disparaîtront pas avec lui, ne se découragea jamais en constatant l'indifférence avec laquelle on accueillait ses efforts pour mettre en pleine lumière toute l'importance de l'analyse intrinsèque ; au contraire, en travailleur infatigable, il en continua les applications dans toutes les branches de la géométrie.

Peu après la publication de l'édition allemande de la *Natürliche Geometrie*, M. le professeur Scheffers démontrait[1] que les hélices coniques-cylindriques obtenues par M. Cesàro, et dont il est question à la page 184 de cet ouvrage, ne sont pas les courbes les plus générales. M. Scheffers introduit d'autres courbes, des hélices cylindriques, qui coupent sous un angle constant les génératrices d'un cône; elles se trouvent sur une quadrique de révolution qui a un foyer au sommet du cône et elles coupent sous un angle constant les génératrices du cône qui les projette de l'autre foyer. M. Cesàro reprend les résultats obtenus par M. Scheffers en substituant[2] à la quadrique une surface de révolution engendrée par la rotation de l'ovale de Descartes autour de l'axe de symétrie, et il démontre que les hélices trouvées par M. Scheffers appartiennent à deux types d'hélices qu'on peut nommer elliptique et hyperbolique et qui rentrent dans la classe des hélices déjà signalées par les professeurs Pirondini[3] et Strazzeri[4]. Cette analyse intrinsèque des hélices poloconiques est appliquée avantageusement par M. Cesàro[5] à l'étude d'une courbe quelconque placée sur un cylindre de révolution, en fournissant une méthode applicable à une surface de révolution quelconque,

[1] *Ueber Loxodromen.* Leipziger Berichte, vol. 54, page 369.

[2] *Analisi intrinseca della eliche poloconiche.* Rendiconti della Rea. Acc. di Napoli, sér. 3e, vol. IX, 1903, pages 73-89.

[3] *Sur les trajectoires isogonales des génératrices d'une surface développable.* CRELLE, 1897.

[4] *Le eliche cilindriche.* In-8°, de 34 pages, SASSARI, 1901. *Generalizzazione di alcune proprietà dell' elica cilindro-conica ordinaria.* Le Matematiche pure ed applicate, vol. I, 1902, pages 244-254.

[5] *Per l'analisi intrinseca della superficie rotonde.* Rendiconti della Rea. Acc. di Napoli, série 3e, vol. IX, 1903, pages 135-145.

procédé qui, avec des modifications très légères, peut facilement être généralisé.

Voici maintenant une autre question qui a attiré l'attention de M. Cesàro et lui a fourni une application[1] de son analyse intrinsèque : c'est la courbe singulière donnée par M. Helge von Koch[2] comme exemple d'une courbe continue qui n'a pas de tangente. M. Cesàro donne une nouvelle construction et il ajoute aux propriétés énoncées par le géomètre suédois une nouvelle série de propriétés caractéristiques. Il démontre, par exemple, que cette courbe est semblable à elle-même dans toutes ses parties; que sa longueur entre deux points quelconques est infinie; que ses points peuvent se représenter arithmétiquement d'une manière naturelle dans le système de numération binaire, ce qui permet d'établir une correspondance univoque entre ces points et les valeurs d'une variable réelle dans l'intervalle (0,1) et d'en déterminer, à l'aide des séries convergentes, les coordonnées en fonction des nombres par lesquels ces variables s'expriment dans le système binaire. Il signale aussi l'existence d'autres courbes analogues à celle de M. von Koch[3] et il les compare aux courbes continues qui passent par tous les points d'une surface donnée, dues à MM. Peano et Hilbert.

L'étude des propriétés des surfaces dans leurs déformations infinitésimales est encore un sujet auquel il applique son analyse et il parvient à établir des formules[4] qui admettent comme cas particulier celles de M. Codazzi ; il démontre aussi par un procédé direct le théorème bien connu de Weingarten sur la déformation des surfaces isothermiques. Il reprend encore l'étude intrinsèque des espaces courbes[5]

---

[1] *Remarques sur la courbe de von Koch.* Atti della Rea. Acc. di Napoli, sér. 2e, vol. XII, 1905. — *Fonctions continues sans dérivée.* Arch. d. Mathem. und Phys., 1905, pages 57-63.

[2] Archiv för Matematik, Astronomi och Fysik. STOCKHOLM, 1904, pages 681-702. — Un segment rectiligne étant divisé en trois parties, sa partie moyenne se substitue aux deux côtés du triangle équilatère construit sur lui ; cette construction étant répétée indéfiniment sur tous les côtés des polygones qu'on obtient, on a la courbe continue mentionnée.

[3] Parmi ces courbes est comprise celle signalée par M. T. Takagi dans ces derniers jours : Comptes rendus de la Soc. physico-mathém. de Tokio, vol. I, page 176.

[4] *Formole per l'analisi intrinseca delle superficie ecc.* Rendiconti della Rea. Acc. di Napoli, sér. 3e, vol. VII, 1901, pages 294-308.

[5] *Nuova teoria intrinseca degli spazi curvi.* Atti dell' Acc. dei Lincei, sér. 5e, vol. V. 1904-1905, pages 3-24.

suivant une idée qu'il avait déjà énoncée dans un précédent mémoire [1], c'est-à-dire d'envisager l'espace courbe à ν dimensions placé dans l'espace linéaire à n dimensions, comme s'il était composé de courbes gauches définies par leurs équations intrinsèques, et il en déduit des cas particuliers très intéressants de théorèmes connus dans l'espace défini par $\nu = 2$, $n = 4$.

Dans la dernière période de sa vie, il s'était efforcé d'obtenir encore de nouveaux résultats, afin de convaincre les plus indifférents sur la portée de l'analyse intrinsèque dans les questions les plus abstraites, et ainsi il était arrivé à montrer non seulement combien cette analyse peut réussir utilement lorsqu'on l'applique aux espaces non-euclidiens, mais aussi comment elle permet de réédifier sur de nouvelles bases toute la géométrie non-euclidienne. La géométrie intrinsèque du plan étant rendue indépendante de l'axiome euclidien des parallèles [2] au moyen d'une définition particulière du carré de l'élément linéaire, il peut passer directement à l'extension des résultats qu'il obtient par cette méthode à l'espace à courbure constante à un nombre de dimensions quelconque [3]; il poursuivit son analyse jusqu'à montrer comment, à l'aide de l'analyse intrinsèque, la géométrie non-euclidienne peut se bâtir sur des fondements nouveaux [4].

Les résultats qu'il obtint confirment complètement la confiance absolue qu'il plaçait dans la méthode intrinsèque et ils forment un digne couronnement de ses efforts de près d'un quart de siècle en vue de perfectionner une théorie qu'il avait trouvée à un état presque embryonnaire.

Les recherches mentionnées ci-dessus interviennent dans un problème d'un grand intérêt qui a formé l'objet de deux des Mémoires les plus remarquables du regretté M. Cesàro.

---

[1] *Sulla rappresentazione intrinseca delle superficie.* Atti Rea. Acc. di Napoli, sér. 2e, vol. XII.

[2] *Sui fondamenti della geometria intrinseca non euclidea.* Rendiconti Acc. dei Lincei, sér. 5e, vol. XIII, 1904, pages 438-445.

[3] *Geometria intrinseca negli spazi a curvatura costante.* Ibid., pages 658-667.

[4] *Fondamento intrinseco della pangeometria.* Atti Acc. dei Lincei, sér. 5e, vol. V, 1904-1905, pages 155-183.

Beltrami avait établi [1], en 1866 et comme extension d'un autre théorème énoncé par lui-même, que la condition nécessaire et suffisante pour que les points d'une surface puissent se reporter sur une surface à courbure constante de manière que les géodésiques de la première soient représentées par celles de la deuxième est que la première surface soit aussi à courbure constante. M. Cesàro a repris ce théorème et il a montré [2] que le chemin suivi par M. Beltrami et plusieurs autres après lui, et qui consiste à chercher avant tout la forme de l'élément linéaire et en déduire après que la forme obtenue convient seulement aux surfaces à courbure $K =$ *constante*, n'est ni la plus générale ni la plus courte ; il est préférable de commencer par démontrer que la condition $K =$ *constante* est nécessaire pour la dite représentation et en déduire après, au moyen de la détermination effective de l'élément linéaire, que cette condition est suffisante. Par un procédé très rapide, qui s'approche de celui qui a été suivi par M. Bianchi [3] pour arriver à la condition $K =$ *constante* seulement, il arrive à établir les résultats obtenus par Beltrami, en déduisant en outre de nombreux cas particuliers, parmi lesquels celui de la développée de la caténoïde dont la propriété est de pouvoir être rapportée point par point sur un plan, de manière que les images de ses géodésiques soient toutes les chaînettes qui ont une droite comme directrice. Il fit voir ensuite [4] que quelques notions de la théorie intrinsèque suffisent à établir des résultats nouveaux.

Pour montrer en outre comment cette méthode évite toutes les difficultés qu'on rencontre lorsqu'on fait usage des procédés ordinaires de la géométrie différentielle, il se sert de quelques-unes des formules fondamentales obtenues par lui pour en déduire, par un procédé à peu près intuitif, les propriétés des loxodromies sur la pseudosphère, la démonstra-

---

[1] *Annali di Matematica*, série 1re, vol. VII, pages 185-204 ; ou bien *Œuvres complètes*, vol. I, page 280.

[2] *Sulle immagini delle geodetiche nella rappresentazione piana delle superficie.* Rendiconti Rea. Acc. de Naples.

[3] *Lezioni di geometria differenziale*, page 412.

[4] *Per l'analisi intrinseca delle figure tracciate sopra una superficie.* Rendiconti Rea. Acc. de Naples, 1905.

tion du théorème de Clairaut pour les lignes à courbure constante sur la pseudosphère, qui ont la propriété de couper orthogonalement un nombre infini de loxodromies qui convergent en un même point réel ou imaginaire, et bien d'autres problèmes intéressants qu'il serait trop long d'énumérer ici. Il avait laissé entrevoir encore beaucoup d'autres applications remarquables dans ce domaine.

La production scientifique du savant Prof. E. Cesàro se trouve dispersée dans un grand nombre de Revues et de Recueils d'Académies [1] italiennes et étrangères: lorsqu'elle se trouvera réunie, dans un ensemble complet, elle formera le plus beau monument qu'on puisse élever à son génie et elle paraîtra certainement plus majestueuse encore que ce qu'on peut entrevoir aujourd'hui. C'est à ses collègues et à ses élèves qu'incombe maintenant la tâche de réunir et de publier ses écrits.

Je ne saurais mieux terminer cette notice, malheureusement incomplète, qu'en appliquant ici à Cesàro les termes prononcés par M. Levy dans son éloge de M. J. Bertrand : « Il fut un semeur d'idées; ses ouvrages classiques, avec leurs nombreux exercices, ont déterminé bien des vocations..... S'il jetait la vérité en prodigue par la plume et par la parole, il savait aussi l'aimer et l'apprécier chez les autres. C'est pour cela qu'il eut beaucoup d'amis. Il savait inculquer l'amour aux jeunes gens : c'est pour cela qu'il fut un vrai maître ».

C. Alasia (Ozieri, Sardaigne).

---

[1] Voici, par ordre de date, les nominations concernant le professeur Cesàro :
1885, mai 19, membre de la *Société royale des Sciences de Liège;*
1892, février 16, membre de l'*Accademia Pontoniana*, de Naples;
1892, décembre 3, membre de la *Società Reale delle Scienze*, de Naples;
1892, décembre 29, membre de l'*Accademia Real das Sciencias*, de Lisbonne;
1895, août 15, membre de la *Reale Accademia dei Lincei*, de Rome;
1898, avril 17, membre de la *Reale Accademia della Scienze*, de Turin;
1900, décembre 17, membre de l'*Académie royale de Belgique;*
1902, avril 14, membre de la *Società Italiana delle Scienze*, dite *dei XL*.