SUR LA LOGIQUE ET LA NOTION DE NOMBRE ENTIER

Autor(en): **Richard, J.**

Objekttyp: **Article**

Zeitschrift: **L'Enseignement Mathématique**

Band (Jahr): **9 (1907)**

Heft 1: **L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE**

PDF erstellt am: **12.07.2024**

Persistenter Link: https://doi.org/10.5169/seals-10134

SUR LA LOGIQUE ET LA NOTION DE NOMBRE ENTIER

On a beaucoup discuté ces temps derniers, sur la notion de nombre entier, sur les principes de l'Arithmétique et particulièrement sur les principes d'*induction complète*.

Trop souvent en logique on emploie des mots vagues. Il en résulte des discussions sans issue. Le mot *démontrer* est un de ceux là. Je vais en préciser le sens.

Supposez que, dans le cours d'une démonstration Géométrique j'aie un triangle A B C ; je sais, soit par l'hypothèse, soit par un raisonnement antérieur, soit de toute autre façon, que l'angle B est égal à l'angle C.

Je dis : « L'angle B est égal à l'angle C, donc le côté AB est égal au côté AC ».

C'est là un petit raisonnement, que je nomme implication, ou inférence. L'inférence est *justifiée*, ou *autorisée* par le théorème supposé connu : « Si un triangle a deux angles égaux, les côtés opposés à ces angles sont égaux ».

Ainsi, une inférence ou implication est un petit raisonnement de la forme suivante :

Le fait A est vrai, donc le fait B est vrai.

L'inférence est juste si 1° Il est établi déjà que le fait A est vrai. 2° Il existe un *principe* ou un théorème général autorisant l'inférence.

Ceci posé, la démonstration d'une proposition consistera dans une chaîne d'inférences, plus ou moins ramifiée, reliant l'hypothèse de la proposition à démontrer à sa conclusion.

Ce n'est pas le lieu d'examiner les particularités que peut présenter une démonstration. Ce que je viens de dire suffira pour la suite.

On définit presque toujours une classe d'objets comme il suit. On indique sous quelles conditions un objet donné x appartient à la classe, et aussi sous quelles conditions deux objets x et y de la classe sont considérés comme distincts.

Lorsqu'une classe est ainsi définie je dirai qu'elle est définie *généralement*.

On peut aussi définir une classe en donnant la liste des objets qui la composent. Je dirai dans ce cas, que la classe est définie *individuellement*. Une classe pouvant être ainsi définie se nommera une *collection*.

Une troisième manière de définir une classe est la définition par *récurrence*. Supposez qu'à un objet a on fasse correspondre par une certaine règle un objet $f(a)$ etc, en répétant l'opération (f). Par exemple, le père de a, le père du père de a, le père du père du père de a etc. constituent les ancêtres de a.

Une classe K peut être formée d'un seul individu x. S'il en est ainsi l'implication suivante est légitime.

y est de la classe K, donc y est identique à x. C'est Leibniz, je crois, qui définit le nombre *deux* comme il suit : « Si x est un objet de la classe A, si y est un objet de la classe A distinct de x, x et y sont deux objets de la classe A ».

On définira ensuite 3 ainsi :

Si B est une collection de deux objets de la classe A, si x est un objet de la classe A n'appartenant pas à B, la collection B′ formée de B et de l'objet x est une collection de 3 objets.

Et en général, ayant défini un nombre p, on définira *son suivant* $p + 1$, comme il suit : Si K est une collection de p objets de la classe A, et si x est un objet de la classe A, n'appartenant pas à K, la collection K′ formée de B et de l'objet x est une collection de $p + 1$ objets.

Les nombres se définissent ainsi par récurrence.

J'arrive au principe d'induction complète. Ce principe s'énonce ainsi.

Si une proposition est vraie du nombre *un*, et si, étant vrai d'un nombre elle l'est de son suivant, elle est vraie pour tous les nombres.

Examinons comment se fait l'application du principe.

On a une proposition P ; cette proposition est vraie du nombre *un*. On sait en outre que : « Si P est vraie d'un nombre, P est vraie de son suivant ». Les mots entre guillemets constituent un principe, que je nomme le principe α.

Je sais que P est vraie de *un*.

Le principe α autorise l'inférence suivante :

P est vraie de *un*, donc P est vraie de *deux*.

C'est la seule chose qu'on puisse inférer en partant des données. Je dis ensuite:

P est vraie de *deux*, donc P est vraie de *trois* ;
P est vraie de *trois*, donc P est vraie de *quatre*;
P est vraie de *quatre*, donc P est vraie de *cinq*.

J'ai ainsi démontré la proposition pour le nombre *cinq*, au moyen de *quatre* inférences. On voit bien qu'*aucune ne peut être omise*. Si l'on voulait démontrer la proposition P pour le nombre 10.000, il faudrait faire 9999 inférences.

Nous nous représentons très bien ces inférences sans les faire. Il suffit d'écrire 9999 fois de suite :

« P est vrai de n, donc P est vraie de $n + 1$ ».

en mettant successivement à la place de n les 9999 premiers nombres, dans leur ordre naturel.

Se représenter des implications sans les faire, celà peut s'appeler *intuition logique*. Le principe d'induction est donc l'expression d'une intuition logique.

Un tel principe est indémontrable. Si en effet il existait une démonstration, la conclusion de la dernière inférence serait : « donc P est vraie d'un nombre quelconque », or aucune de nos inférences n'aboutit à une pareille conclusion.

« Mais, objectera le lecteur, ceci tient à ce que vous avez défini les nombres par récurrence ; si vous aviez donné une définition générale du nombre, le principe d'induction eût été une conséquence de cette définition générale. »

Avant de réfuter cette objection, je reviens sur la définition d'une classe par récurrence.

Supposons que par une certaine règle on puisse faire correspondre à un objet x, un autre objet $f(x)$; f sera alors le signe de cette correspondance. Je suppose que cette correspondance possède les deux propriétés suivantes.

1° Les correspondants de deux objets distincts sont distincts.

2° Il existe un objet a, qui n'est le correspondant d'aucun autre.

Je définirai une classe K comme il suit: j'y mettrai l'objet a, l'objet $f(a)$, l'objet $ff(a)$ et en général quand j'y mettrai un objet, j'y mettrai aussi son correspondant.

Si je désigne par $f_n(a)$, ce que j'obtiens en répétant n fois l'opération f, la classe K se composera de a et de tous les objets $f_n(a)$, n étant n'importe quel nombre.

Cette manière de définir la classe K suppose la notion de nombre.

Mais on peut éviter celà.

On définira la classe K comme il suit :

§ 1° La classe K contient a;

§ 2° Si la classe K contient b, la classe K contient $f(b)$;

§ 3° Toute classe G qui contient a, et qui ne peut contenir aucun objet b de la classe K sans contenir $f(b)$, contient la classe K ou lui est identique.

Dans ces phrases il n'est plus question de nombres. D'autre part la partie § 3° de cet énoncé équivaut au principe d'induction complète. Effectivement, soit P une proposition sur laquelle on sait

1° Que P est vraie de a;

2° Que si P est vraie de x, P est vraie de $f(x)$.

Soit G la classe d'objets pour laquelle P est vraie; à l'aide de la partie § 3° de l'énoncé ci-dessus, on démontre que G contient la classe K. Ce paragraphe 3° équivaut donc au principe d'induction complète.

Il semble donc, au 1er abord que les paragraphes 1°, 2°, 3° donnent de la classe K une définition générale, en sorte que toute définition par récurrence peut être réduite à une définition générale.

Regardons les choses de plus près.

Une définition générale de K, c'est une condition nécessaire et suffisante pour qu'un objet x DONNÉ TOUT SEUL appartienne à K.

La définition ci-dessus ne satisfait pas à cette condition: Pour démontrer que b appartient à K, il faut considérer les objets a $f(a)$ $f_2(a)$ . . . etc. jusqu'à ce qu'on en trouve un identique à b. La définition ne nous donne pas le moyen de procéder autrement. Pour montrer que b appartient à la classe, il faut le relier à a.

Ceci réfute alors l'objection donnée plus haut. On pourrait démontrer le principe d'induction si l'on donnait une définition générale du nombre. Mais les définitions générales du nombre qu'on a tenté de donner sont comme la définition de la classe K donnée ci-dessus, elles ne sont qu'apparentes. Par un ingénieux tour de phrase on peut faire disparaître certains mots tels que : « et ainsi de suite » ou bien des noms de nombre.

Cela ne transforme pas en définition générale une définition par récurrence.

J'ajouterai quelques mots relatifs à la récurrence. Soit A une classe, et f le signe d'une correspondance univoque et réciproque :

Univoque cela veut dire :

$$\text{Si } x = y \ , \quad f(x) = f(y) \ .$$

Réciproque cela veut dire :

$$\text{Si } f(x) = f(y) \ , \quad x = y \ .$$

Le signe $=$ signifie l'identité.

Je définirai la classe f(A) comme il suit : si x est un A, $f(x)$ est un f (A), si z est un f (A) il existe un x tel que $f(x)$ est identique à z, et x est un A.

Je puis alors former une série de classes

$$\text{A} \ , \quad f(\text{A}) \ , \quad f_2(\text{A}) \ \ldots \ f_n(\text{A}) \ , \ \ldots$$

Je pourrai appeler totalité de ces classes une classe K definie comme il suit :

x appartient à la classe K s'il existe un entier n tel que x appartient à f_n (A), ou bien si x est un A.

La partie commune à toutes ces classes sera une classe ω définie comme il suit :

x appartient à la classe ω, si x est un A, et si x appartient aussi à la classe $f_n(a)$ quel que soit n.

Ces définitions sont utilisées dans la démonstration du théorème de Cantor Bernstein, que je n'examinerai pas ici. Il y figure la notion de nombre entier. On peut l'éliminer en quelque sorte par une tournure de phrase appropriée, mais, comme dans ce qui précède on ne transforme pas pour celà une définition par récurrence en définition générale.

Peut-on démontrer que les axiomes de la logique et de l'Arithmétique ne sont pas contradictoires. Il est clair que ces axiomes ne sont pas condradictoires, puisqu'ils sont vrais mais il y a une autre façon de poser la question.

Dans la logique symbolique de M. Peano, on adopte un certain nombre de signes, signifiant *et, ou, implique, est, non,* etc. Certaines règles de transformation des propositions sont alors vraies, et l'on peut raisonner en appliquant ces *règles*.

Parmi ces règles il y en a d'irréductibles entre elles, c'est à dire qui ne peuvent se démontrer les unes par les autres, sans spécifier le sens attribué aux signes. Les autres se déduisent de celles-là. La question de la compatibilité des axiomes peut alors se poser ainsi. En admettant ces règles, et en raisonnant d'après elles, on ne peut pas arriver à conclure la fausseté de l'une d'elles. Cela peut-il se démontrer sans spécifier le sens des signes? Il s'agit de montrer qu'en combinant des signes d'après certaines lois on ne peut pas arriver à obtenir certaines combinaisons.

A cela il n'y a rien d'absurde. Dans l'étude de certains jeux, sur l'échiquier par exemple, on trouve des propositions analogues. Mais le principe d'induction complète reste en dehors de la question. Il faut en effet l'admettre dans ces sortes de démonstrations. Il faudra en effet faire voir que, si après n applications des règles on n'arrive pas à une contradiction, on n'y arrivera pas par $n + 1$ applications. On ne saurait donc démontrer, par ce procédé, le principe d'induction complète, ou la non contradiction de ce principe.

Voici maintenant la conclusion de ce petit travail sur la logique : Ce qu'on nomme le principe d'induction présente un caractère très particulier ; ce n'est pas un principe destiné à légitimer des inférences, comme sont les autres principes. Il énonce la possibilité de faire un nombre d'inférences pouvant croître indéfiniment.

Ce principe est indémontrable, il est l'expression d'une intuition logique.

J. Richard (Dijon).