II. — Propriété de l'angle extérieur d'un triangle.

Objekttyp: **Chapter**

Zeitschrift: **L'Enseignement Mathématique**

Band (Jahr): **10 (1908)**

Heft 1: **L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE**

PDF erstellt am: **12.07.2024**

6° Si p désigne un nombre entier ou sectionnaire on a :

$$(A + B + C) \cdot p = (A \cdot p) + (B \cdot p) + C \cdot p)$$

et par conséquent aussi, si l'on a: $A \cdot p > A' \cdot p$ on peut conclure: $A > A'$.

Les principes qui précèdent contiennent toute l'arithmétique et toute l'algèbre.

I. — Angle d'un triangle.

Deux demi-droites OX et OY peuvent former (Fig. 21) *soit un angle creux, soit un angle pointu, l'un supérieur, l'autre inférieur à 2 droits.*

Lorsqu'on admet, comme nous l'avons admis jusqu'ici, que *par deux points absolument quelconques* ne passe jamais qu'une seule droite on peut affirmer que tout angle engagé dans un triangle est un angle pointu. Démontrons le :

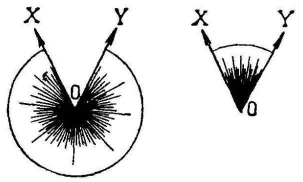

Fig. 21.

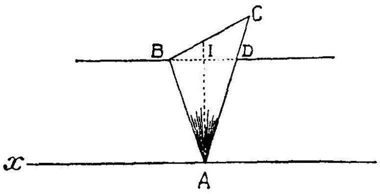

Fig. 22.

Soit $\widehat{BAC}$ (Fig. 22) un angle engagé dans un triangle BAC, sur le plus grand des deux côtés de cet angle prenons une *longueur* égale à celle du plus petit soit D le point ainsi obtenu sur AC, nous obtenons un triangle isocèle BDA ; soit I le milieu de BD, joignons-I à A, nous obtenons une droite perpendiculaire à BD, menons A perpendiculaire à AI cette droite ne saurait pénétrer dans l'intérieur du triangle BDA, car elle couperait BD, ce qui n'est pas possible, donc l'angle $\widehat{BAC}$ engagé dans le triangle est formé de droites toutes situées d'un même côté de AX, donc l'angle considéré ne peut atteindre 2 droits.

II. — Propriété de l'angle extérieur d'un triangle.

Définition. — On appelle angle extérieur d'un triangle, l'angle formé en un sommet par l'un des côtés du triangle et par le prolongement de l'autre. (C'est aussi un angle pointu).

Théorème. — *L'angle extérieur d'un triangle est supérieur à tout angle intérieur qui n'a pas même sommet que lui.*

Faisons voir par exemple que : (Fig. 23) $\widehat{XAC} > \widehat{ACB}$. Joignons le troisième sommet B au milieu D de AC et prolongeons BD d'une longueur égale en DB′, joignons B′ à A, la droite AB′ sera située dans l'angle extérieur $\widehat{DAX}$; les angles opposés par le sommet BDC et ADB′ valent chacun 2 droits diminués de l'angle $\widehat{ADB}$ ils sont donc égaux ; alors les deux triangles ADB′ et BDC ayant un angle égal compris entre deux côtés égaux chacun à chacun, sont égaux ; et par suite les angles opposés respectivement à DB′ et BD côtés égaux, seront égaux ; ainsi $\widehat{B'AD} = \widehat{DCB}$; mais B′AD est portion de l'angle extérieur $\widehat{CAX}$, donc enfin on a bien :

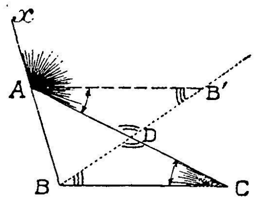

Fig. 23.

$$\widehat{XAC} > \widehat{ACB}.$$

III. — Comparaisons simultanées de 2 côtés d'un triangle et de leurs angles opposés.

Théorème. — *Si deux côtés d'un triangle sont inégaux les angles opposés à ces côtés sont inégaux dans le même ordre de taille.*

Comparons (Fig. 24) les deux côtés AB et AC du triangle ABC ; soit le côté AC > AB. Prenons sur AC un segment AD = AB et joignons BD ; l'angle $\widehat{ADB} = \widehat{ABD}$ (puisque le triangle ABD à deux côtés égaux) ; l'angle $\widehat{ADB}$ extérieur est plus grand que l'angle $\widehat{DCB}$ du triangle partiel BDC ; l'angle $\widehat{ABD}$ portion de l'angle $\widehat{ABC}$ est donc plus grand que l'angle ACB, donc à plus forte raison l'angle total ABC dépassera-t-il ACB.

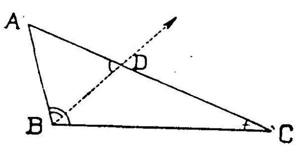

Fig. 24.

Théorème (réciproque du précédent). — *Si deux angles* d'un triangle sont inégaux, les côtés opposés à ces *angles* sont inégaux et dans le même ordre de taille.