III. — Comparaisons simultanées de 2 côtés d'un triangle et de leurs angles opposés.

Objekttyp: **Chapter**

Zeitschrift: **L'Enseignement Mathématique**

Band (Jahr): **10 (1908)**

Heft 1: **L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE**

PDF erstellt am: **09.08.2024**

Théorème. — *L'angle extérieur d'un triangle est supérieur à tout angle intérieur qui n'a pas même sommet que lui.*

Faisons voir par exemple que : (Fig. 23) $\widehat{XAC} > \widehat{ACB}$. Joignons le troisième sommet B au milieu D de AC et prolongeons BD d'une longueur égale en DB′, joignons B′ à A, la droite AB′ sera située dans l'angle extérieur $\widehat{DAX}$; les angles opposés par le sommet BDC et ADB′ valent chacun 2 droits diminués de l'angle $\widehat{ADB}$ ils sont donc égaux ; alors les deux triangles ADB′ et BDC ayant un angle égal compris entre deux côtés égaux chacun à chacun, sont égaux ; et par suite les angles opposés respectivement à DB′ et BD côtés égaux, seront égaux ; ainsi $\widehat{B'AD} = \widehat{DCB}$; mais B′AD est portion de l'angle extérieur $\widehat{CAX}$, donc enfin on a bien :

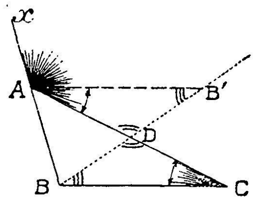

Fig. 23.

$$\widehat{XAC} > \widehat{ACB}.$$

III. — Comparaisons simultanées de 2 côtés d'un triangle et de leurs angles opposés.

Théorème. — *Si deux côtés d'un triangle sont inégaux les angles opposés à ces côtés sont inégaux dans le même ordre de taille.*

Comparons (Fig. 24) les deux côtés AB et AC du triangle ABC ; soit le côté AC > AB. Prenons sur AC un segment AD = AB et joignons BD ; l'angle $\widehat{ADB} = \widehat{ABD}$ (puisque le triangle ABD à deux côtés égaux) ; l'angle $\widehat{ADB}$ extérieur est plus grand que l'angle $\widehat{DCB}$ du triangle partiel BDC ; l'angle $\widehat{ABD}$ portion de l'angle $\widehat{ABC}$ est donc plus grand que l'angle ACB, donc à plus forte raison l'angle total ABC dépassera-t-il ACB.

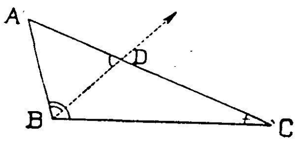

Fig. 24.

Théorème (réciproque du précédent). — *Si deux angles* d'un triangle sont inégaux, les côtés opposés à ces *angles* sont inégaux et dans le même ordre de taille.

Soient (sans figure) $\widehat{A}$ et $\widehat{B}$ deux angles d'un triangle et soient: a et b les côtés respectivement opposés à ces angles ; je dis que l'inégalité $\widehat{A} > \widehat{B}$ entraînera comme conséquence l'inégalité $a > b$.

En effet, en comparant a et b, trois cas peuvent seuls se présenter ; ou bien 1° : $a < b$, ou bien 2° : $a = b$; ou bien 3° : $a > b$; or le cas de $a < b$ entraînerait, d'après le théorème précédent $A < B$ et le cas de $a = b$ entraînerait comme nous l'avons vu, au début de ces leçons $A = B$. Ces deux suppositions provisoires $a < b$ et $a = b$ entraîneraient donc des conséquences contradictoires avec l'hypothèse; on aura donc bien $a > b$ tout comme on avait d'abord $A > B$.

Remarque. — Ce genre de raisonnement est ce qu'on nomme un raisonnement *par l'absurde*.

IV. — Un côté d'un triangle est plus petit que la somme des deux autres.

Il n'y a lieu à démonstration que si le côté considéré n'est pas le plus petit de tous, soit alors (Fig. 25) $AB > AC$. Prolongeons AC d'une longueur CD, de manière que $AD = AB$, joignons BD; envisageons d'une part le triangle isocèle ABD et d'autre part le triangle CBD. Dans ce dernier, l'angle CBD portion de ABD sera plus petit que celui-ci ou que son égal CDB ; on a donc un triangle CBD dans lequel $\widehat{CDB} > \widehat{CBD}$; on peut donc affirmer, d'après le théorème précédent, que $CD < CB$; ABAD se composant de AC et de CD sera donc moindre que $AC + CB$.

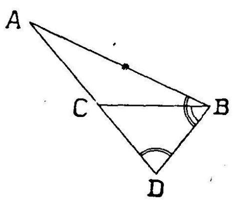

Fig. 25.

V. — Comparaison de deux triangles qui ont deux côtés égaux chacun à chacun comprenant deux angles inégaux.

Théorème. — *Si deux triangles ont deux côtés égaux chacun à chacun comprenant un angle inégal, les côtés opposés à cet angle dans les deux triangles seront inégaux et dans le même ordre de taille.*