VI. — Définition et propriétés de l'angle trièdre.

Objekttyp: **Chapter**

Zeitschrift: **L'Enseignement Mathématique**

Band (Jahr): **10 (1908)**

Heft 1: **L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE**

PDF erstellt am: **09.08.2024**

Or, d'après le théorème direct la supposition : $A > A'$ entraînerait : $a > a'$, ce qui n'est pas ; la supposition $A = A'$ entraînerait : $a = a'$, ce qui n'est pas non plus ; la seule supposition qui reste donc possible est : $A < A'$.

VI. — Définition et propriétés de l'angle trièdre.

On appelle angle *trièdre* la figure 27 formée par 3 demi-droites et par les trames angulaires qui les réunissent deux à deux.

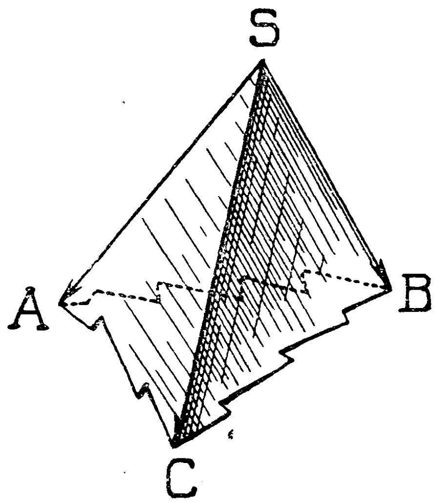

Fig. 27.

Ces trames angulaires portent encore le nom de *faces* du trièdre, leurs intersections ou les demi-droites déjà considérées se nomment les *arêtes* du trièdre.

Deux faces forment sur leur arête commune un angle *dièdre* que l'on nomme : un dièdre du trièdre. Le trièdre, sorte de capuchon, n'est pas une figure fermée ; mais un angle trièdre présente néanmoins certaines analogies avec un triangle ; nous allons par exemple démontrer le théorème suivant :

Théorème. — *Dans tout angle trièdre une face est plus petite que la somme des deux autres.*

Il n'y a lieu à démonstration que pour la face qui n'est pas la plus petite ; dans le plan de cette face qui prolonge le triangle ASB (Fig. 28) reproduisons donc un angle égal à la face adjacente plus petite, à partir de l'arête commune aux deux faces et dans une portion de la plus grande des deux faces ; nous obtenons ainsi l'angle ASD portion de ASB et reproduction de la face ASX ; sur l'arête SX prenons une longueur $SC = SD$.

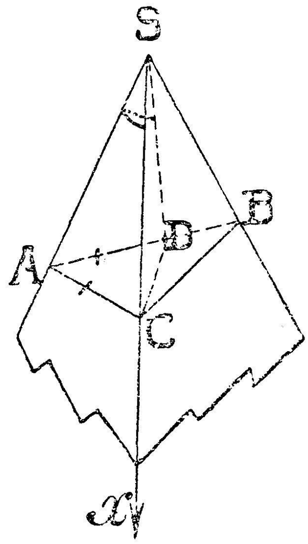

Fig. 28.

Menons CA, CB, CD ; grâce à notre choix des points C et D, les deux triangles ASD et ASC, déjà réunis par le côté commun SA seront égaux, et leur égalité nous apprendra ensuite que $AD = AC$; d'autre part le triangle ABC nous donne

$$AB = AD + DB < AC + CB$$

et comme $AD = AC$, nous concluons

$$DB < CB \, .$$

Mais alors les deux triangles CSD et DSB qui ont deux côtés égaux chacun à chacun, ont leurs troisièmes côtés inégaux dans un ordre de taille que nous connaissons ; donc, d'après le théorème précédent, nous concluons :

$$\widehat{DSB} < \widehat{CSB} \, ,$$

ainsi, quand dans la plus grande face on a enlevé une portion égale à une face voisine on trouve un résidu plus petit que l'autre face voisine ; c'est donc que la première face était plus petite que la somme des deux autres.

VII. — **Théorème du parapluie.**

Théorème. — *La somme des faces d'un trièdre est moindre que 4 droits.*

Soit (Fig. 29) un trièdre de sommet S et soient SA, SB, SC ses 3 arêtes.

En prolongeant l'arête SA en SX nous formons un autre trièdre d'arêtes SB, SC, SX. Dès lors, en appliquant le théorème précédent au nouveau trièdre, et en remarquant que deux des faces du nouveau trièdre sont des suppléments de faces du premier trièdre, nous aurons :

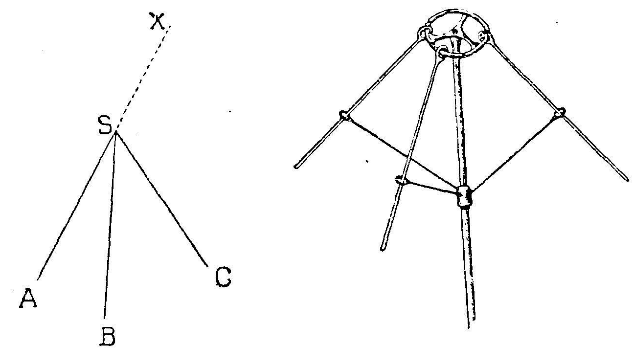

Fig. 29.

$$BSC < \widehat{BSX} + \widehat{CSX} \, ,$$

ou :

$$\widehat{BSC} < 2^{\mathrm{d}} - \widehat{ASB} + 2^{\mathrm{d}} - \widehat{ASC} \, ,$$