IX. -Angles polyèdres. Théorème du parapluie, applicable aux angles polyèdres convexes.

Objekttyp: **Chapter**

Zeitschrift: **L'Enseignement Mathématique**

Band (Jahr): **10 (1908)**

Heft 1: **L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE**

PDF erstellt am: **10.08.2024**

Et sur le plan déterminé par les trois points ABC abaissons une perpendiculaire SO, démontrons que l'angle ASB est plus petit que sa projection AOB. Soit I le milieu de AB.

Joignons I à O et à S par deux droites. SI étant perpendiculaire à AB, OI l'est aussi; d'autre part, prolongeons SO d'une quantité égale en OS′ au-dessous du plan AOB ; si l'on rabattait la figure SIO dans son plan autour de IO, S se rabattrait en S′ d'où on conclut SI $=$ S′I, or dans le triangle SS′I on a :

$$SS' < IS + IS' \quad \text{ou} \quad 2SO < 2SI \quad \text{d'où} \quad SO < SI\ ;$$

la perpendiculaire SO est moindre que l'oblique SI ; on montrerait de même que IO $<$ IS, on conclut de là que si on rabat la distance SI sur IO le point S se rabattra en T, au-delà de O.

L'angle $\widehat{AOI}$ est donc un angle extérieur du triangle AOT ; on conclut de là

$$\widehat{AOI} > \widehat{ATI} \quad \text{ou} \quad 2\widehat{AOI} > 2\widehat{ATI} \quad \text{ou} \quad AOB > ATB$$

et comme ATB est la reproduction par rabattement de l'angle ASB on conclut AOB $>$ ASB.

Dès lors, en revenant aux figures du trièdre dont le sommet est projeté en O sur le plan ABC, la somme des trois faces du trièdre est plus petite que la somme de leurs projections sur le plan ABC.

Dès lors si le point O est à l'intérieur du triangle la somme des projections des angles est précisément quatre droits.

Si au contraire le point O est hors du triangle ABC, chacun des trois angles en O reste cependant un angle pointu et l'un d'eux contient les deux autres, AOC par exemple contient AOB et BOC ; la somme des trois angles en O est donc moindre que deux fois l'angle AOC et comme l'angle AOC est moindre que deux droits la somme des triangles en O est ici moindre que quatre droits.

Donc dans tous les cas la somme des faces du trièdre est moindre que quatre droits.

IX. — Angles polyèdres. Théorème du parapluie, applicable aux angles polyèdres convexes.

On appelle *angle polyèdre* la figure 31 formée par plusieurs demi-droites envisagées dans un certain ordre ; les *faces* de l'angle polyèdre sont les trames angulaires formées par les divers groupes de deux demi-droites consécutives.

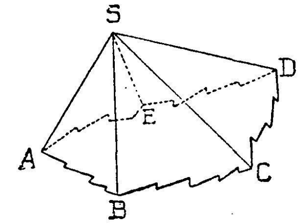

Fig. 31.

Les demi-droites sont les *arêtes* de l'angle polyèdre.

Un angle polyèdre est dit *convexe* si toutes ses arêtes demeurent d'un même côté par rapport au plan de chacune de ses faces; cette définition est satisfaite d'elle-même pour un angle trièdre.

Nous allons montrer que le théorème du parapluie s'étend aux angles polyèdres convexes ; il suffit pour le voir nettement de faire la *remarque suivante :*

Etant donnés (Fig. 32) deux demi-plans T_1 et T_2 comptés à partir de leurs intersections respectives OY et OZ avec un même

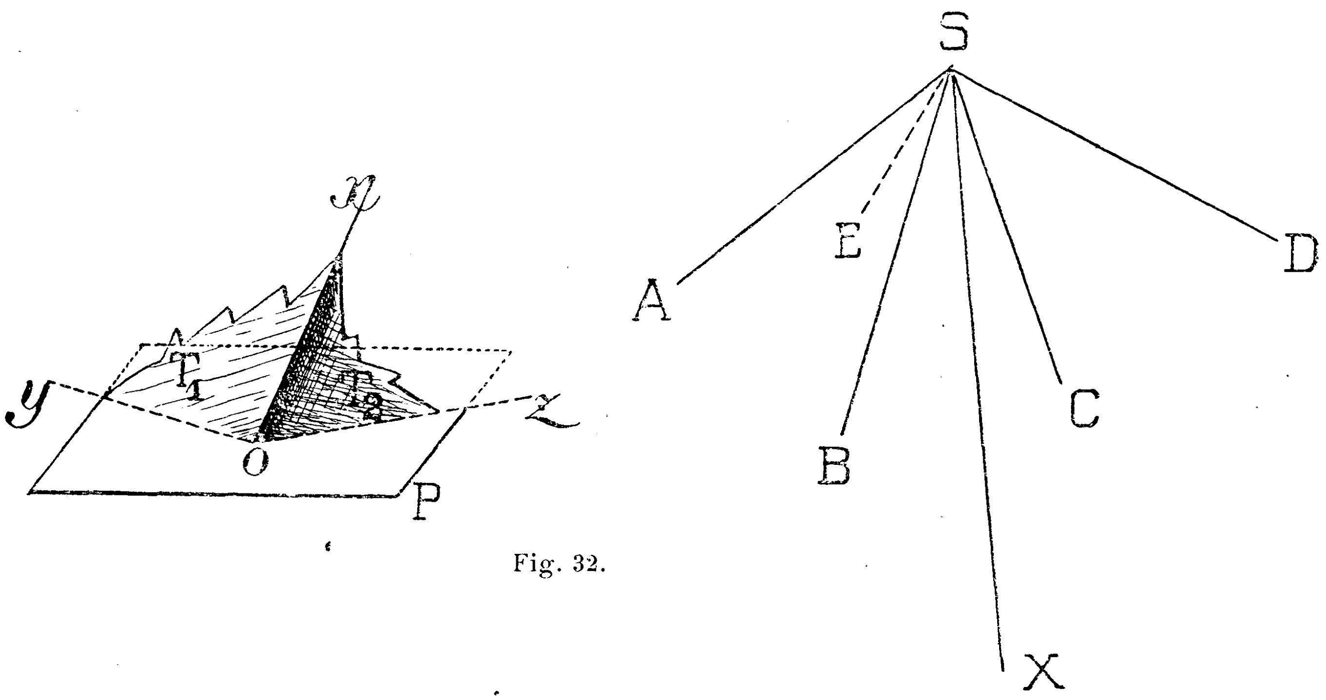

Fig. 32.

plan P, et tous deux comptés d'un même côté de P, les deux demi-plans auront toujours une demi-droite commune, située de ce même côté.

Considérons dès lors un angle polyèdre convexe et trois faces consécutives ; envisageons la face intermédiaire BSC, les prolongements des deux autres à partir des arêtes SB et SC se couperont en dehors des angles faces extrêmes suivant une demi-droite SX, si on remplace alors dans l'angle polyèdre les arêtes SB et SC par l'arête unique SX on forme un nouvel angle polyèdre convexe comme le premier mais ayant une arête de moins. En répétant cette réduction un assez grand nombre de fois on parviendra évidemment à un trièdre ; d'ailleurs par cette réduction, si le nombre des faces diminue, en revanche la somme de leurs *valeurs augmente.* Cela tient à ce que dans l'angle trièdre, dont les arêtes sont SB, SX, SC, la face BSC est moindre que la somme des faces BSX et XSC.

Ainsi par la réduction considérée, la somme des angles des faces augmente plus qu'elle ne diminue par la suppression d'une face. La somme des faces augmente donc jusqu'à l'obtention du trièdre, or ainsi augmentée elle est moindre que quatre droits, à plus forte raison la somme des faces de l'angle polyèdre primitif était-elle donc plus petite que quatre droits.

CHAPITRE IV

Les cercles du plan et de la sphère. Analogies du plan et de la sphère.

I.

Définitions. Considérons (sans figure), les points N, R, M de l'espace qui sont à une *distance* donnée d'un même point O également donné, tous ces points en nombre infini forment ce que l'on appelle une *surface sphérique ;* le point O est le centre de la sphère, les divers segments OM, OR, ON... sont des *rayons* de la sphère.

Ligne d'intersection d'une surface sphérique et d'un plan. Considérons (fig. 33) une surface sphérique de centre O et un plan P; soit M un point appartenant à cette surface sphérique et au plan P; soit H le pied de la perpendiculaire abaissée de O sur le plan P, joignons les points M et H par une droite, celle-ci sera perpendiculaire à HO; donnons à la droite MH envisagée comme une barre rigide liée à l'axe HO envisagé comme un pivot rigide, un mouvement de révolution autour de l'axe HO; dans ce mouvement le point M, nous l'avons vu, ne quitte pas le plan P, il ne quitte pas non plus la surface sphérique puisque pendant ce mouvement la distance OM ne varie pas: *il existe donc une ligne commune au plan P et à la surface sphérique* et cette ligne peut-être *définie dans le plan P l'ensemble des points de P dont chacun est à une distance fixe du point H,* cette ligne est appelée *circonférence de cercle.* H est son centre. Ainsi une surface sphérique et un plan P ont une ligne commune qui est une circonférence de cercle.

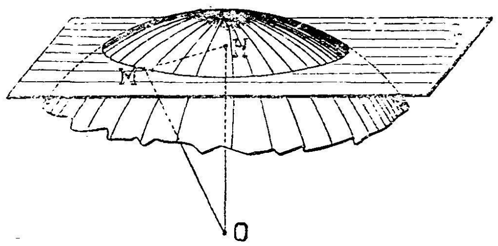

Fig. 33.