

SUR L'ÉQUIVALENCE DES ÉQUATIONS

Autor(en): **Barbette, E.**

Objektyp: **Article**

Zeitschrift: **L'Enseignement Mathématique**

Band (Jahr): **10 (1908)**

Heft 1: **L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE**

PDF erstellt am: **30.06.2024**

Persistenter Link: <https://doi.org/10.5169/seals-10976>

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Inhalten der Zeitschriften. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern. Die auf der Plattform e-periodica veröffentlichten Dokumente stehen für nicht-kommerzielle Zwecke in Lehre und Forschung sowie für die private Nutzung frei zur Verfügung. Einzelne Dateien oder Ausdrucke aus diesem Angebot können zusammen mit diesen Nutzungsbedingungen und den korrekten Herkunftsbezeichnungen weitergegeben werden. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Die systematische Speicherung von Teilen des elektronischen Angebots auf anderen Servern bedarf ebenfalls des schriftlichen Einverständnisses der Rechteinhaber.

Haftungsausschluss

Alle Angaben erfolgen ohne Gewähr für Vollständigkeit oder Richtigkeit. Es wird keine Haftung übernommen für Schäden durch die Verwendung von Informationen aus diesem Online-Angebot oder durch das Fehlen von Informationen. Dies gilt auch für Inhalte Dritter, die über dieses Angebot zugänglich sind.

On remarquera que les longueurs d'arcs de cercle de rayons égaux sont comparables entre elles au même titre que des longueurs de droites ou des étendues angulaires.

Angles d'un triangle sphérique. La génération (fig. 52), d'un fuseau sphérique par une rotation convenable continue d'une demi-circonférence

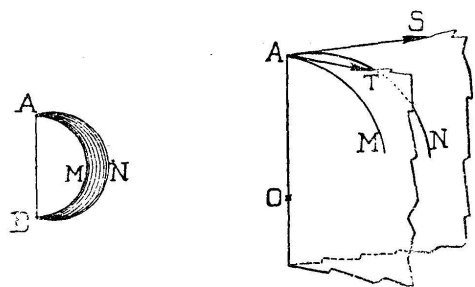


Fig. 52.

tournant autour d'un diamètre est absolument analogue à la rotation du plan autour d'une perpendiculaire au plan, elle permet de définir les angles sphériques par une trame de grands cercles; l'angle sphérique peut d'ailleurs être mesuré par l'angle des tangentes rectilignes à ses deux côtés qui sont tirées du sommet A; cet angle est encore un angle rectiligne du dièdre formé par les demi-plans dont les arcs de cercle sont les images sphériques.

mesuré par l'angle des tangentes rectilignes à ses deux côtés qui sont tirées du sommet A; cet angle est encore un angle rectiligne du dièdre formé par les demi-plans dont les arcs de cercle sont les images sphériques.

J. ANDRADE (Besançon).

(A suivre.)

SUR L'ÉQUIVALENCE DES ÉQUATIONS

LEMME. — La somme des n fractions $\frac{a_1}{b_1}, \frac{a_2}{b_2}, \frac{a_3}{b_3}, \dots, \frac{a_n}{b_n}$ étant représentée par la fraction

$$\frac{a_1 b_2 b_3 \dots b_n + a_2 b_1 b_3 \dots b_n + \dots + a_n b_1 b_2 \dots b_{n-1}}{b_1 b_2 b_3 \dots b_n}, \quad (1)$$

pour que cette dernière fraction soit irréductible, il faut et il suffit que les n fractions données le soient aussi et que leurs dénominateurs soient premiers entre eux deux à deux.

DÉMONSTRATION. 1° *La condition est nécessaire.* En effet, si deux des dénominateurs au moins, b_1 et b_2 par exemple, ou si le numérateur et le dénominateur de l'une des fractions,

a_1 et b_1 par exemple, admettaient un facteur premier commun, ce facteur diviserait le numérateur et le dénominateur de la fraction (1) : en sorte que cette fraction ne serait pas irréductible.

2° *La condition est suffisante.* En effet, si le numérateur et le dénominateur de la fraction (1) admettaient un facteur premier commun : ce facteur, divisant le produit $(b_1 b_2 b_3 \dots b_n)$, diviserait l'un de ses termes, b_1 par exemple ; ce facteur, divisant aussi la somme :

$$(a_1 b_2 b_3 \dots b_n + a_2 b_1 b_3 \dots b_n + \dots + a_n b_1 b_2 \dots b_{n-1})$$

et divisant les $(n - 1)$ dernières parties de cette somme, diviserait la première partie $(a_1 b_2 b_3 \dots b_n)$ et par suite diviserait a_1 puisque b_1 est premier avec $b_2, b_3, \dots b_n$, donc premier avec le produit $(b_2 b_3 \dots b_n)$: en sorte que la fraction $\frac{a_1}{b_1}$ ne serait pas irréductible.

OBSERVATION. Ce lemme est applicable tant aux fractions algébriques rationnelles qu'aux fractions numériques. Nous entendons par *facteur premier commun* à des polynomes entiers en x , un binome de la forme $k(x - a)$ divisant chacun d'eux, le nombre k n'étant ni nul ni infini, a étant un nombre fini et déterminé, positif, nul ou négatif; nous entendons par *polynomes premier entre eux*, des polynomes n'admettant pas de facteur premier commun.

THÉORÈME. — *Lorsqu'une équation est formée de fractions rationnelles et de termes entiers en x : l'équation obtenue, en multipliant ses deux membres par le plus petit commun multiple des dénominateurs est équivalente à la proposée.*

DÉMONSTRATION. — PREMIER CAS : *toutes les fractions sont irréductibles et leurs dénominateurs sont premiers entre eux deux à deux.*

La fraction qui représente la somme des fractions de l'équation proposée, le dénominateur commun choisi étant le plus petit commun multiple des dénominateurs, est aussi irréductible et l'équation affecte la forme

$$\frac{f(x)}{\varphi(x)} + F(x) = 0 \quad (1)$$

Si nous multiplions par $\varphi(x)$, nous obtenons l'équation entière

$$f(x) + F(x) \cdot \varphi(x) = 0. \quad (2)$$

Nous allons prouver que les équations (1) et (2) sont équivalentes :

1° *Toute solution $x = a$ de l'équation (1) est une solution de l'équation (2).* En effet, $x = a$ étant une solution de l'équation (1), transforme cette équation en l'identité

$$\frac{f(a)}{\varphi(a)} + F(a) \equiv 0. \quad (1')$$

La fonction $F(x)$ étant entière en x , $F(a)$ est fini et déterminé; il en est donc de même de $\frac{f(a)}{\varphi(a)}$ et par suite $\varphi(a)$, qui est fini et déterminé, est aussi différent de zéro. En multipliant par $\varphi(a)$ tous les termes de l'égalité (1'), nous obtenons :

$$f(a) + F(a) \cdot \varphi(a) \equiv 0. \quad (2')$$

et cette identité prouve que $x = a$ est une solution de l'équation (2).

2° *Toute solution $x = \alpha$ de l'équation (2) est une solution de l'équation (1).* En effet, $x = \alpha$ étant une solution de l'équation (2), transforme cette équation en l'identité

$$f(\alpha) + F(\alpha) \cdot \varphi(\alpha) \equiv 0. \quad (2'')$$

Mais $\varphi(\alpha)$, fini et déterminé, est aussi différent de zéro: car si $\varphi(\alpha)$ était nul, $f(\alpha)$ le serait également à cause de l'identité (2''); les polynômes $\varphi(x)$ et $f(x)$ seraient divisibles par $(x - \alpha)$ et la fraction $\frac{f(x)}{\varphi(x)}$ ne serait pas irréductible.

En divisant par $\varphi(\alpha)$ tous les termes de l'égalité (2''), nous obtenons

$$\frac{f(\alpha)}{\varphi(\alpha)} + F(\alpha) \equiv 0. \quad (1'')$$

et cette identité prouve que $x = \alpha$ est une solution de l'équation (1).

DEUXIÈME CAS: *certaines fractions (une au moins) ou toutes*

les fractions sont réductibles et leurs dénominateurs sont premiers entre eux deux à deux.

Les valeurs de x qui annulent les deux termes de l'une ou l'autre des fractions réductibles, sont racines de l'équation proposée ; car, pour ces valeurs, l'équation se transforme en l'identité¹ :

$$\frac{0}{0} + A \equiv 0 ,$$

A étant un nombre fini et déterminé, nul ou non. Après avoir supprimé les facteurs communs aux deux termes de chaque fraction réductible, facteurs dont les racines représentent des solutions de l'équation, nous retombons sur le premier cas : il en résulte que, en multipliant les deux membres de l'équation considérée par le plus petit commun multiple des dénominateurs, l'équation transformée est équivalente à la proposée.

Observation. Il est possible de déterminer le nombre des racines égales de la façon suivante : si le numérateur de l'une des fractions réductibles est divisible par $(x - a)^p$ et son dénominateur par $(x - a)^q$, cette fraction prend la forme $\frac{(x - a)^p \cdot f_1(x)}{(x - a)^q \cdot \varphi_1(x)}$; si nous représentons par $(x - a)^r \cdot F_1(x)$ l'ensemble de tous les autres termes, entiers ou fractionnaires. r pouvant être nul et chacune des fonctions $f_1(x)$, $\varphi_1(x)$, $F_1(x)$ n'étant plus divisible par $(x - a)$, l'équation devient

$$\frac{(x - a)^p \cdot f_1(x)}{(x - a)^q \cdot \varphi_1(x)} + (x - a)^r \cdot F_1(x) = 0$$

et possède autant de racines a que son équivalente

$$(x - a)^p \cdot \frac{f_1(x)}{\varphi_1(x)} + (x - a)^{q+r} \cdot F_1(x) = 0 .$$

¹ Le nombre indéterminé $\frac{0}{0}$ représente tous les nombres et, parmi eux, se trouve le nombre $-A$; donc parmi toutes les valeurs que prend $\frac{0}{0} + A$, se trouve la valeur $-A + A \equiv 0$. Par exemple, si nous considérons la fonction $y = \frac{3(x-2)}{x-2} + x + 1$: pour $x \neq 2$, elle devient $y = 3 + x + 1$ ou $y = x + 4$ et s'annule pour $x = -4$; pour $x = 2$, elle devient $y = \frac{0}{0} + 3$ et parmi ces valeurs indéterminées de y , se trouve le nombre nul 0. L'équation $\frac{3(x-2)}{x-2} + x + 1 = 0$ a par suite pour racines $x = -4$ et $x = 2$.

Par conséquent, si $p \leq q + r$, cette équation admet p racines égales à a ; si $p > q + r$, cette équation admet $(q + r)$ racines égales à a .

TROISIÈME CAS : *les dénominateurs des fractions, irréductibles ou non, ne sont pas premiers entre eux deux à deux.*

Additionnons¹ toutes les fractions en prenant pour dénominateur commun, le plus petit commun multiple des dénominateurs; l'équation prend la forme

$$\frac{f(x)}{\varphi(x)} + F(x) = 0.$$

Si les fonctions $f(x)$ et $\varphi(x)$ ont des racines communes, racines qui sont les solutions de l'équation obtenue en égalant à zéro leur plus grand commun diviseur, celles-ci sont des solutions de l'équation et nous rentrons dans le deuxième cas considéré; si les fonctions $f(x)$ et $\varphi(x)$ sont premières entre elles, nous retombons sur le premier cas.

REPRÉSENTATION GRAPHIQUE. La fonction

$$y = \frac{f(x)}{F(x)} \equiv \frac{(x - a)^p \cdot f_1(x)}{(x - a)^p \cdot F_1(x)}.$$

$f_1(x)$ et $F_1(x)$ n'admettant plus de diviseur commun $(x - a)$ prend la forme $\frac{0}{0}$ pour $x = a$; parmi tous les nombres que représente $\frac{0}{0}$, les mathématiciens n'ont considéré que celui auquel ils ont donné le nom de *vraie valeur*² et qui, géométriquement, représente l'ordonnée du point d'intersection des lignes dont les équations sont

$$(x - a)^p = 0 \quad \text{et} \quad y_1 = \frac{f_1(x)}{F_1(x)}$$

c'est-à-dire l'ordonnée $\frac{f_1(a)}{F_1(a)}$ du point d'intersection de p droites

¹ Nous pourrions aussi grouper les fractions, puis additionner celles constituant chaque groupe (en prenant pour dénominateur commun, le plus petit commun multiple des dénominateurs), de telle sorte que les dénominateurs de tous les groupes ainsi formés soient premiers entre eux deux à deux: nous retomberions sur le premier cas considéré si toutes les fractions résultantes étaient irréductibles, et sur le deuxième si certaines de ces fractions (une au moins) ou toutes étaient réductibles.

² Ce nom de *vraie valeur* sonne faux! Cette vraie valeur n'est autre que la *limite* de la fonction y , la variable x tendant vers a .

confondues, parallèles à l'axe des y découpant le segment a sur l'axe des x , et de la ligne y_1 .

· La représentation graphique de y montre que cette fonction est réellement indéterminée pour $x = a$ et par conséquent que, parmi les valeurs correspondantes de y variant de $-\infty$ à $+\infty$, se trouvent non seulement la vraie valeur $\frac{f_1(a)}{F_1(a)}$, mais aussi la valeur 0.

Dans la résolution d'une équation, les facteurs communs entrant dans la composition des deux termes d'une fraction, ne peuvent être supprimés que si nous *convenons* de ne regarder comme solutions de l'équation, non pas les racines qui rendent la fonction identiquement nulle, *mais celles pour lesquelles cette fonction ne peut avoir d'autre valeur que zéro*. Suivant les conditions du problème que nous nous proposons de résoudre ou du théorème que nous voulons démontrer, telle ou telle autre valeur du nombre $\frac{0}{0}$ sera à prendre : dans la détermination du coefficient angulaire de la tangente en un point d'une courbe, par exemple, nous en prendrons la limite ; peut-être, dans une des théories que réserve l'avenir, devons-nous en prendre une autre valeur ; mais dans la résolution *brute* des équations, le nombre $\frac{0}{0}$ *ne satisfaisant à aucune condition*, est réellement indéterminé.

EXEMPLE 1. Les nombres a, b, c étant finis et déterminés, résoudre l'équation

$$\frac{x+a}{x-a} + \frac{x+b}{x-b} + \frac{x+c}{x-c} + 3 = 0. \quad (1)$$

en supposant : A) a, b et c distincts ; B) $a \neq b$ et $b = c$; C) $a = b = c \neq 0$; D) $a = b = c = 0$.

Solution. A) a, b et c sont distincts. L'équation proposée est équivalente à la suivante :

$$(x+a)(x-b)(x-c) + (x-a)(x+b)(x-c) + (x-a)(x-b)(x+c) + 3(x-a)(x-b)(x-c) = 0$$

ou

$$3x^3 - 2(a+b+c)x^2 + (ab+bc+ca)x = 0.$$

Cette équation se décompose en deux autres :

$$x_1 = 0 .$$

et

$$3x^2 - 2(a + b + c)x + (ab + bc + ca) = 0$$

d'où

$$\left. \begin{matrix} x_2 \\ x_3 \end{matrix} \right\} = \frac{a + b + c \pm \sqrt{a^2 - a(b + c) + b^2 - bc + c^2}}{3} .$$

B) $a \neq b$ et $b = c$. L'équation proposée devient

$$\frac{x + a}{x - a} + 2 \cdot \frac{x + b}{x - b} + 3 = 0 . \quad (2)$$

et est équivalente à la suivante :

$$(x + a)(x - b) + 2(x - a)(x + b) + 3(x - a)(x - b) = 0 .$$

ou

$$3x^2 - (2a + b)x = 0 .$$

Cette équation a pour solutions :

$$\begin{aligned} x_1 &= 0 \\ x_2 &= \frac{2a + b}{3} . \end{aligned}$$

Observons qu'en faisant $c = b$ dans les solutions x_2 et x_3 de l'équation (1), résolue dans l'hypothèse A, nous obtenons :

$$x_2 = \frac{2a + b}{3} \quad \text{et} \quad x_3 = b .$$

La solution $x_3 = b$ est une solution étrangère à l'équation (2) : en effet, le plus petit commun multiple des dénominateurs de l'équation (1) est $(x - a)(x - b)(x - c)$, expression qui devient $(x - a)(x - b)^2$ si $c = b$, tandis que le plus petit commun multiple des dénominateurs de l'équation (2) est $(x - a)(x - b)$.

C) $a = b = c \neq 0$. L'équation proposée devient

$$\frac{x + a}{x - a} + 1 = 0 . \quad (3)$$

et est équivalente à la suivante :

$$x + a + x - a = 0 ,$$

d'où

$$x_1 = 0 .$$

Observons qu'en faisant $a = b = c$ dans les solutions x_2 et x_3 de l'équation (1), résolue dans l'hypothèse A, nous obtenons :

$$x_2 = a \quad \text{et} \quad x_3 = a .$$

Ces deux solutions sont étrangères à l'équation (3); en effet, le plus petit commun multiple des dénominateurs de l'équation (1) est $(x - a)(x - b)(x - c)$, expression qui devient $(x - a)^3$ si $a = b = c$, tandis que le dénominateur de la fraction qui intervient dans l'équation (3) est simplement $(x - a)$.

D) $a = b = c = 0$. L'équation proposée devient

$$\frac{x}{x} + 1 = 0 . \tag{4}$$

et est équivalente à la suivante :

$$x + x = 0$$

d'où

$$x_1 = 0 .$$

Observons qu'en faisant $a = b = c = 0$ dans les solutions x_2 et x_3 de l'équation (1), résolue dans l'hypothèse A, nous obtenons :

$$-x_2 = 0 \quad \text{et} \quad x_3 = 0 .$$

Ces deux solutions sont étrangères à l'équation (4) : en effet, le plus petit commun multiple des dénominateurs de l'équation (1) est $(x - a)(x - b)(x - c)$, expression qui devient x^3 si $a = b = c = 0$, tandis que le dénominateur de la fraction qui intervient dans l'équation (4) est simplement x .

EXEMPLE 2. Résoudre l'équation.

$$\frac{1 + x^3}{(1 + x)^2} + \frac{1 - x^3}{(1 - x)^2} = 4 .$$

Solution. Divisons les deux termes de la première fraction par $(1 + x)$ et les deux termes de la seconde par $(1 - x)$; l'équation proposée se décompose en trois autres:

$$\begin{aligned} 1 + x &= 0 & \text{d'où} & \quad x_1 = -1; \\ 1 - x &= 0 & \text{d'où} & \quad x_2 = 1; \\ \frac{1 - x + x^2}{1 + x} + \frac{1 + x + x^2}{1 - x} &= 4 & \text{d'où} & \quad 0x^3 + 8x^2 - 2 = 0. \end{aligned}$$

Cette dernière équation a pour racines:

$$x_3 = \infty; \quad x_4 = \frac{1}{2}; \quad x_5 = -\frac{1}{2}.$$

EXEMPLE 3. Résoudre l'équation

$$\frac{7}{3(x-3)(2x+1)} - \frac{2}{(2x+1)(x-1)} - \frac{2}{3(x-1)(x-3)} = 1.$$

Solution. L'équation proposée est équivalente à la suivante:

$$\frac{7(x-1) - 6(x-3) - 2(2x+1)}{3(x-3)(2x+1)(x-1)} = 1$$

ou

$$\frac{x-3}{(x-3)(2x+1)(x-1)} = -1.$$

Divisons les deux termes de la fraction par $(x-3)$; l'équation se décompose en deux autres:

$$x-3=0 \quad \text{d'où} \quad x_1=3;$$

et

$$\frac{1}{(2x+1)(x-1)} = -1 \quad \text{d'où} \quad 1 = -2x^2 + x + 1,$$

$$x(2x-1) = 0$$

en sorte que

$$x_2 = 0 \quad \text{et} \quad x_3 = \frac{1}{2}.$$

EXEMPLE 4. Les nombres α et x' étant finis et déterminés, résoudre l'équation

$$\frac{x^2 - x'^2 - 3(x - x')}{x - x'} = \frac{\alpha}{\alpha} \cdot (2x' + \alpha - 3)$$

en supposant A) α constant, puis successivement: 1° α différent de zéro; 2° α égal à zéro; B) α variable et ayant a pour

limite, puis successivement : 1° a différent de zéro ; 2° a égal à zéro.

Solution. Quelle que soit la valeur de α , l'équation proposée admet la solution $x_1 = x'$. L'autre solution est donnée par l'équation suivante, obtenue en divisant les deux termes de la fraction du premier membre par $(x - x')$:

$$x + x' - 3 = \frac{\alpha}{\alpha} \cdot (2x' + \alpha - 3) \tag{1}$$

A) α est constant :

1° $\alpha \neq 0$. L'équation (1) est équivalente à l'équation :

$$x + x' - 3 = 2x' + \alpha - 3$$

d'où

$$x_2 = x' + \alpha.$$

2° $\alpha = 0$. De l'équation (1), nous déduisons

$$x_2 = \frac{0}{0} \cdot (2x' - 3) - x' + 3.$$

La racine x_2 est, par suite, indéterminée.

B) α est variable et a est sa limite :

1° $a \neq 0$. L'équation (1) est équivalente à l'équation :

$$\text{Limite } x + x' - 3 = 2x' + a - 3$$

d'où

$$\text{Limite } x \quad \text{ou} \quad x_2 = x' + a.$$

2° $a = 0$. L'équation (1) est équivalente à la suivante :

$$\text{Limite } x + x' - 3 = 2x' - 3$$

d'où

$$\text{Limite } x \quad \text{ou} \quad x_2 = x'.$$

E. BARBETTE (Liège).