

Zeitschrift: L'Enseignement Mathématique
Band: 10 (1908)
Heft: 1: L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE

Rubrik: MÉLANGES ET CORRESPONDANCE

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. [Siehe Rechtliche Hinweise.](#)

Conditions d'utilisation

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. [Voir Informations légales.](#)

Terms of use

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. [See Legal notice.](#)

Download PDF: 16.10.2024

ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, <https://www.e-periodica.ch>

MÉLANGES ET CORRESPONDANCE

Sur la nature des axiomes de la géométrie.

A propos des récents articles de M. Richard.

1. LETTRE DE M. COMBEBIAC.

I. — Les récents articles de M. Richard sur la nature des axiomes de la Géométrie (*L'Ens. math.* IX^e année, p. 463-473, X^e année, p. 60-65) m'inspirent quelques réflexions, que je sou mets à ceux qui s'efforcent, nouveaux Saint-Augustin, de pénétrer le mystère de la droite idéale.

Tout d'abord, les difficultés que soulèvent les représentations numériques ne s'appliquent pas plus aux lignes droites qu'aux autres notions physiques susceptibles de telles représentations et, s'il y a là matière à préoccupations subtiles, la constatation que la ligne droite n'y échappe pas ne fait que confirmer son classement parmi ces notions physiques. Mais je n'insiste pas sur ce point¹ parce qu'il ne me paraît pas intéresser le fond du débat, si du moins je comprends bien la pensée des géomètres idéalistes.

Pourquoi tient-on, en effet, aux notions géométriques idéales ? Simplement, semble-t-il, parce qu'on les croit indispensables à la Géométrie rationnelle. *Or il n'en est rien*². Celle-ci, sous sa forme actuelle, met bien en jeu, il est vrai, les lignes droites, par exemple, mais ses raisonnements s'appliquent, en réalité, à des lignes de forme quelconque pourvu qu'elles constituent un ensemble possédant les propriétés attribuées à l'ensemble des lignes droites, et c'est là l'essentiel, puisque ces raisonnements s'appliquent alors approximativement aux objets qui jouissent approximativement des dites propriétés. Le besoin de la droite idéale n'existe donc pas — pas plus d'ailleurs que la notion elle-même (rien n'est déconcertant comme une notion qui n'existe pas).

Quant à une prétendue différence de nature entre la Géométrie et la Physique, elle repose sur une confusion entre la Géométrie

¹ Cf. F. KLEIN, *Anwendung der Differential- und Integralrechnung auf Geometrie*, Leipzig 1902 ; voir notamment les paragraphes ayant pour titres : Empirische und abstrakte Genauigkeit ; Präzisions- und Approximationsmathematik ; die abstrakte und die empirische Festlegung, einer Funktion ; von der Genauigkeit der Naturgesetze ; Ungenauigkeit aller praktischen Messungen ; etc.

² Qu'on imagine une théorie des fonctions se développant entièrement sur un cas physique. Cela n'a rien d'absurde en soi mais serait dépourvu d'intérêt et choquerait par sa dysharmonie due à ce que la portée du raisonnement dépasserait les notions mises en jeu ; on aurait pourtant là un modèle de la Géométrie actuelle. *On n'a pas plus besoin de la notion de droite pour établir la doctrine géométrique que l'on n'a besoin d'une fonction déterminée pour établir la théorie des fonctions.*

rationnelle et la Géométrie physique. La première (si tant est que l'on doive donner le nom de Géométrie à la théorie des continus) *doit ignorer aussi bien la droite idéale que la droite physique* (j'y insiste) et il est clair, dès lors, que ses concepts, qui sont, non pas idéaux, mais purement rationnels³, ce qui n'est pas la même chose, ne peuvent être mis en parallèle avec les notions de la Physique. Mais qu'est-ce qui nous empêche de concevoir, pour un avenir plus ou moins éloigné, l'édification d'une *Physique rationnelle* (si l'on peut s'exprimer ainsi) ? Le parallélisme serait alors complet, et la conclusion, c'est que la Géométrie (physique) est la seule des sciences naturelles qui soit, pour le moment, parvenue au stade rationnel. Mais ce n'est pas une raison pour que ses concepts (j'entends les concepts¹ proprement géométriques, et non les concepts d'ensemble, d'ordre, de métrique, etc.) ne soient pas uniquement empiriques.

Le principe de raison suffisante par lequel M. Richard justifie la rectilinéarité des rayons lumineux dans le vide n'est autre que le principe de l'isotropie et de l'homogénéité du vide, c'est-à-dire l'expression d'un fait expérimental. Ce sont également des faits expérimentaux qui, en Statique, en Dynamique et dans les divers domaines de la Physique, nous fournissent la notion de ligne droite (ne fût-ce qu'à titre de limite) et nous fournissent *la même*. Il n'y a dans tout cela rien de rationnellement nécessaire, mais seulement des faits, qui sont sans doute reliés entre eux par des causes générales, que l'on découvrira peut-être, l'unité du mécanisme naturel se manifestant davantage de jour en jour.

Il resterait peut-être un phénomène à expliquer — et je ne m'en charge pas — c'est celui par lequel une notion d'origine manifestement matérielle se transforme en notion idéale selon la révélation kantienne ; c'est d'ailleurs le phénomène en lequel se résume la genèse de tous les concepts métaphysiques (si souvent contradictoires en soi) ; c'est, en définitive, le *processus métaphysique*.

II. — M. Richard, à la fin de son article (p. 64), développe des considérations tendant à établir, si j'ai bien compris, que le postulat d'Euclide appartient au domaine métrique et non au domaine projectif. C'est, je crois, une erreur. Elle tient à ce qu'on néglige le fait qu'il n'existe pas de transformation projective (c'est-à-dire conservant les lignes droites) faisant correspondre l'espace entier à un volume borné. C'est pour cela qu'une métrique projective ne peut pas être à la fois archimédienne et hyperbolique, comme je l'ai indiqué dans un article récent publié dans cette revue (p. 183).

G. COMBEBIAC (Bourges).

¹ Les concepts qui sont à la base de l'Analyse mathématique (nombre entier, ensemble, inclusion, correspondance) ne sont pas des concepts idéaux ; ils suffisent d'ailleurs pour établir la Géométrie rationnelle.

2. RÉPONSE DE M. J. RICHARD.

Entre les assertions de M. Combebiac et les miennes la contradiction n'est souvent qu'apparente.

Ainsi, selon M. Combebiac, il n'est pas besoin de notion de droite pour faire de la Géométrie. Les propriétés de la ligne droite s'appliquent à des lignes de forme quelconque.

C'est ce que j'ai dit moi-même en montrant que les axiomes ne sont pas des définitions au sens ordinaire du mot.

Il peut y avoir, dit M. Combebiac, une physique rationnelle. C'est précisément ce que j'ai dit dans mon article.

Le postulatum d'Euclide appartient au domaine métrique. Voici ce que je veux dire par là. Le groupe des transformations ponctuelles changeant les droites en droites, contient des sous-groupes. J'appelle groupe métrique un de ces sous-groupes ayant six paramètres et possédant un invariant. Parmi ces sous-groupes il y a des groupes euclidiens, des groupes non-euclidiens. Le postulatum exprime une propriété d'un de ces groupes, et non une propriété du groupe linéaire général.

L'isotropie du vide n'est pas un fait expérimental. Comment vérifier cette propriété pour les espaces interplanétaires ? La propagation de la lumière en ligne droite n'est pas bien démontrée par l'expérience ; il en est de même des lois de la réflexion et de la réfraction. Toutes ces lois sont des conséquences de la théorie ondulatoire de la lumière. Elles font partie de la physique rationnelle dont parle M. Combebiac.

Je termine par deux observations générales :

I°. — On peut envisager la Géométrie en elle-même, ou dans ses applications à l'étude du monde extérieur. Pour étudier la Géométrie en elle-même il suffit de remarquer que les axiomes forment un système exempt de contradictions. (M. Hilbert l'a démontré.) Il n'est pas nécessaire d'avoir une idée quelconque de ligne droite ou de point, ni même l'idée d'espace.

C'est là une sorte de Géométrie bien abstraite. Dans la pratique, on a toujours une représentation sensible sur le papier, mais la Géométrie ainsi comprise est indépendante de cette représentation. Du reste, comme le dit M. Combebiac, les droites peuvent être des lignes de forme quelconque. Le mot *droite*, le mot *distance* et même le mot *point* ont dans cette géométrie un sens hypothétique, non un sens catégorique.

Il en est tout autrement pour les applications. Les mots doivent avoir un sens catégorique. Les axiomes sont vrais ou faux ; cela ne dépend plus de ce qu'on nomme point, ou droite, ou distance. Or c'est sur cette Géométrie appliquée seulement que porte ma discussion. Elle serait inutile à la Géométrie abstraite.

II. — Les mots du langage philosophique ont souvent un sens

bien flou, et celà est très gênant. Cette phrase : « Les axiomes viennent de l'expérience » n'a pas un sens net, il me serait facile de le montrer, mais celà m'entraînerait trop loin. C'est une raison, et il y en a bien d'autres, pour être très modéré dans les discussions philosophiques et pour ne pas avoir peur de changer d'avis. Il faudrait trouver un moyen d'exprimer sa pensée d'une façon bien nette, sans ambiguïté. Je ne désespère pas d'y arriver, mais je n'y suis pas encore complètement parvenu en ce qui concerne la question des axiomes.

J. RICHARD (Dijon).

3. RÉPLIQUE DE M. COMBEBIAC.

Ainsi que le fait remarquer M. Richard, il est fort difficile de s'entendre sur certaines questions parce que les mots n'ont que la signification que chacun leur donne. Je crois toutefois pouvoir constater notre accord sur les deux points essentiels, savoir : 1° les mêmes lignes ne peuvent pas servir d'axes à une métrique hyperbolique et à une métrique parabolique ; 2° les difficultés incontestablement fort délicates que soulève la question des relations de la Géométrie et de l'expérience sont du même ordre que celles que l'on rencontre pour les diverses branches de la physique, de sorte que l'on se trouve ramené à la grosse question du réalisme *scientifique* et non plus *géométrique*.

Sur les sommes de sinus et de cosinus dont les arguments sont en progression arithmétique.

Ces sommes donnent lieu à d'intéressants exercices de transformations dans les applications de la formule de Moivre. En raison du rôle qu'elles jouent dans les Mathématiques supérieures, leur sommation mérite d'être examinée, à titre d'exercice déjà dans les éléments.

Posons

$$A = \sum_{k=0}^{n-1} \cos (\alpha + k\beta) , \quad B = \sum_{k=0}^{n-1} \sin (\alpha + k\beta)$$

et formons la somme

$$A + Bi = \sum_{k=0}^{n-1} \left\{ \cos (\alpha + k\beta) + i \sin (\alpha + k\beta) \right\} .$$

Cette expression peut se transformer successivement comme suit :

$$A + Bi = (\cos \alpha + i \sin \alpha) \sum_{k=0}^{n-1} \left\{ \cos k\beta + i \sin k\beta \right\}$$

$$\begin{aligned}
&= (\cos \alpha + i \sin \alpha) \sum_{k=0}^{n-1} (\cos \beta + i \sin \beta)^k \\
&= (\cos \alpha + i \sin \alpha) \frac{1 - (\cos \beta + i \sin \beta)^n}{1 - (\cos \beta + i \sin \beta)} \\
&= (\cos \alpha + i \sin \alpha) \frac{1 - (\cos n\beta + i \sin n\beta)}{1 - (\cos \beta + i \sin \beta)} \\
&= (\cos \alpha + i \sin \alpha) \frac{2 \sin^2 \frac{n\beta}{2} - 2i \sin \frac{n\beta}{2} \cos \frac{n\beta}{2}}{2 \sin^2 \frac{\beta}{2} - 2i \sin \frac{\beta}{2} \cos \frac{\beta}{2}} \\
&= (\cos \alpha + i \sin \alpha) \frac{\sin \frac{n\beta}{2} - i \cos \frac{n\beta}{2} \sin \frac{n\beta}{2}}{\sin \frac{\beta}{2} - i \cos \frac{\beta}{2} \sin \frac{\beta}{2}}
\end{aligned}$$

ou

$$\begin{aligned}
&= (\cos \alpha + i \sin \alpha) \frac{\cos \frac{n\beta}{2} + i \sin \frac{n\beta}{2} \sin \frac{n\beta}{2}}{\cos \frac{\beta}{2} + i \sin \frac{\beta}{2} \sin \frac{\beta}{2}} \\
&= \left\{ \cos \left(\alpha + \frac{n\beta}{2} - \frac{\beta}{2} \right) + i \sin \left(\alpha + \frac{n\beta}{2} - \frac{\beta}{2} \right) \right\} \frac{\sin \frac{n\beta}{2}}{\sin \frac{\beta}{2}} \\
&= \left\{ \cos \left(\alpha + \frac{(n-1)\beta}{2} \right) + i \sin \left(\alpha + \frac{(n-1)\beta}{2} \right) \right\} \frac{\sin \frac{n\beta}{2}}{\sin \frac{\beta}{2}}.
\end{aligned}$$

On en déduit

$$\left. \begin{aligned}
\sum_{k=0}^{n-1} \cos (\alpha + k\beta) &= \frac{\cos \left(\alpha + \frac{(n-1)\beta}{2} \right) \sin \frac{n\beta}{2}}{\sin \frac{\beta}{2}}, \\
\sum_{k=0}^{n-1} \sin (\alpha + k\beta) &= \frac{\sin \left(\alpha + \frac{(n-1)\beta}{2} \right) \sin \frac{n\beta}{2}}{\sin \frac{\beta}{2}}.
\end{aligned} \right\}$$