III. — Perpendiculaires et obliques sur la sphère.

Objekttyp: **Chapter**

Zeitschrift: **L'Enseignement Mathématique**

Band (Jahr): **10 (1908)**

Heft 1: **L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE**

PDF erstellt am: **12.07.2024**

De là ce changement dans la marche suivie; les angles sphériques ne sont plus superposables sur eux mêmes par retournement, et les raisonnements, qui pour le plan employaient le retournement, sont remplacés sur la sphère par les raisonnements qui invoquent les propriétés de la symétrie.

Ces remarques se vérifieront encore dans la théorie des perpendiculaires et des obliques sphériques que nous allons résumer succinctement.

III. — **Perpendiculaires et obliques sur la sphère.**

Etant donnés sur la sphère (sans figure) un arc de grand cercle XY et un point A hors de cet arc, nous distinguerons deux cas : 1° ou bien A est un pôle de XY: 2° ou bien A est distinct des pôles de XY ; en nous rappelant les propriétés de la projection d'une droite sur un plan (chapitre II) nous voyons que dans le cas 1° tous les arcs de grand cercle joignant A aux divers points de XY sont égaux à un quadrant et tous perpendiculaires à XY ; au contraire dans le second cas on obtient l'arc perpendiculaire à XY et passant par A en joignant ce point à l'un ou l'autre pôle de XY.

L'arc ainsi obtenu *est unique* mais il a deux pieds : (fig. 63) le pied H ou le pied K; l'un d'eux H est à une distance de A moindre qu'un quadrant. Nous allons voir que cette distance AH est la plus courte distance sphérique de A aux divers points de XY ; comparons l'arc AH à l'arc *oblique* AM prolongeons AH d'une longueur égale au-dessus de XY et joignons A′ et M par un grand arc; le triangle AA′M est un triangle propre et

$$\text{arc } AA' < \text{arc } AM + \text{arc } A'M$$

les arcs AM et A′M sont égaux comme symétriques par rapport au plan du cercle XY, donc

$$2 \text{ arc } AH < 2 \text{ arc } AM$$

ou

$$\text{arc } AH < \text{arc } AM\,.$$

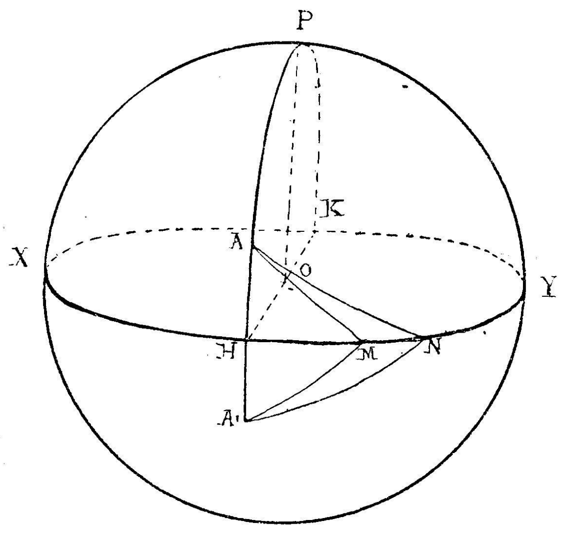

Fig. 63.

Soient (fig. 63) AM et AN deux obliques aboutissant du même côté de H et telles que HM et HN soient tous deux moindres que 2 *quadrants*. Soit alors arc HM $<$ arc HN.

Le triangle AMA′ est intérieur alors au triangle propre ANA′ or soient (fig. 64) deux tels triangles; prolongeons l'arc AM jusqu'en J sur A′N; par les deux triangles sphériques partiels on a :

$$\text{arc AM} + \text{arc MJ} < \text{arc AN} + \text{arc NJ}$$
$$\text{arc A'M} < \text{arc MJ} + \text{arc JA} ;$$

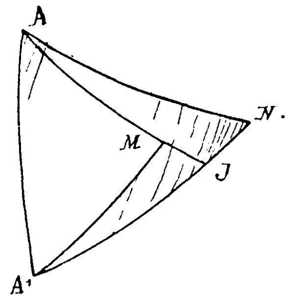

Fig. 64.

d'où, en ajoutant ces égalités membre à membre :

$$\text{arc AM} + \text{arc MA'} < \text{arc AN} + \text{arc NA'},$$

en appliquant ceci à la figure 63, nous aboutirons à la conclusion :

$$2 \text{ arc AM} < 2 \text{ arc AN} , \quad \text{ou à :} \quad \text{arc AM} < \text{arc AN} ;$$

donc, de 2 obliques sphériques qui s'écartent inégalement du *pied propre* de la perpendiculaire celle qui s'écarte le plus est la plus grande.

Propriété des obliques réduites. — Triangles réduits. — Nous considérons d'abord (fig. 65) les obliques dont les pieds s'écartent de moins d'un quadrant du pied de la plus courte distance; considérons d'abord deux telles obliques AM et AN, situées dans un même hémisphère par rapport à AH; soit arc HM $<$ arc HN et soit AM′ l'arc symétrique de AM par rapport au plan de l'arc AH; arc AM $<$ arc AN; donc : arc AM′ $<$ arc AN; donc, dans le triangle propre M′AN angle $\widehat{AM'H} >$ angle $\widehat{ANM}$; donc, en revenant au triangle AMN, angle extérieur en M $<$ angle $\widehat{ANM}$.

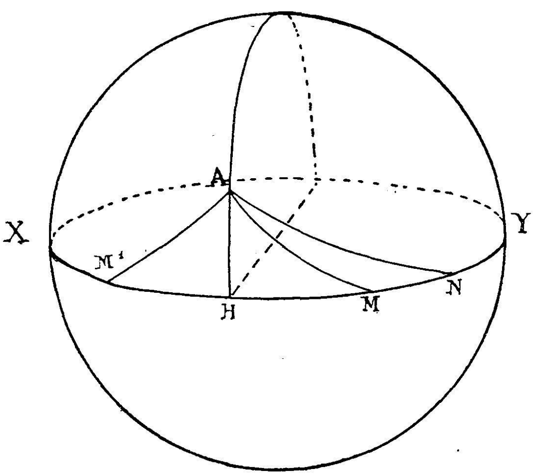

Fig. 65.

Remarque. — On étendra aisément cette propriété à tout triangle sphérique *réduit,* c'est-à-dire, dont les trois côtés sont moindres qu'un quadrant.

Petits cercles sur la sphère. — Le rayon sphérique d'un petit cercle de la sphère sera la distance sphérique de l'un des pôles à un point quelconque du petit cercle; dans ce qui suit nous prendrons pour pôle celui des pôles pour lequel le rayon sphérique est moindre qu'un quadrant.

La remarque faite tout à l'heure sur l'angle extérieur des triangles sphériques réduits nous permettra de démontrer à l'égard des petits cercles de la sphère les mêmes théorèmes de continuité que ceux établis pour les cercles du plan; en considérant ainsi les pôles propres et les rayons propres des petits cercles de la sphère, nous aurons alors pour les positions mutuelles de deux petits cercles de la surface sphérique les mêmes critères que pour les cercles du plan (voir chapitre IV).

IV. — Quelques propriétés spéciales aux triangles sphériques, leurs aires comparées.

1° *Le fuseau sphérique et la notion d'aire sphérique.* — Les fuseaux sphériques de même angle sont, au moins d'une manière, superposables; ils représentent des *étendues* ou *aires* sphériques mesurables et comparables entre elles comme les angles des fuseaux considérés.

D'autre part si on partage un fuseau en deux portions par un plan perpendiculaire à l'arête du fuseau on obtient deux triangles sphériques bi-rectangles symétriques et isocèles admettant un mode de superposition indiqué par la figure 66.

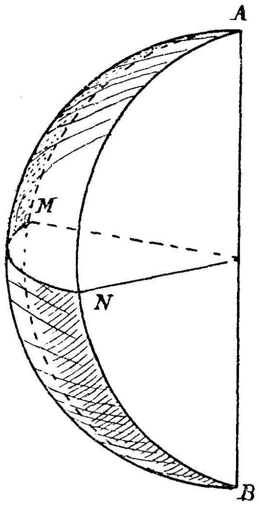

Fig. 66.

L'aire du fuseau est alors *double* de l'aire de l'un ou l'autre de ces triangles.

Nous appellerons *aires sphériques équivalentes* : des aires qui sont composées *de portions superposables en correspondance dans les deux figures.*

Si on prend comme unité d'aire *l'aire du triangle sphérique trirectangle* qui est la huitième portion de la sphère, l'aire d'un fuseau sera évidemment mesurée par deux fois le nombre qui mesure son angle comparé à l'angle droit.

2° Théorème. — *Deux triangles sphériques symétriques sont équivalents.* — Si on élève sur deux côtés d'un triangle sphérique, et en leurs milieux, des arcs de grand cercle perpendiculaires respectivement à ces côtés, le point I (sans figure) où ces arcs se coupent est à des distances sphériques égales des trois sommets, il appartient donc à l'arc de grand cercle perpendiculaire au troisième côté en son milieu.

Soient (fig. 67, en haut) ABC et A'B'C' deux triangles sphériques symétriques, le point I' symétrique du point I de l'un sera évidemment à distances sphériques égales des trois som-