

# PROPRIÉTÉS D'UN SYSTÈME DE DEUX TRIANGLES, OU DE DEUX TÉTRAÈDRES

Autor(en): **Laisant, C. A.**

Objektyp: **Article**

Zeitschrift: **L'Enseignement Mathématique**

Band (Jahr): **10 (1908)**

Heft 1: **L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE**

PDF erstellt am: **10.08.2024**

Persistenter Link: <https://doi.org/10.5169/seals-10961>

## **Nutzungsbedingungen**

Die ETH-Bibliothek ist Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Inhalten der Zeitschriften. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern. Die auf der Plattform e-periodica veröffentlichten Dokumente stehen für nicht-kommerzielle Zwecke in Lehre und Forschung sowie für die private Nutzung frei zur Verfügung. Einzelne Dateien oder Ausdrucke aus diesem Angebot können zusammen mit diesen Nutzungsbedingungen und den korrekten Herkunftsbezeichnungen weitergegeben werden. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Die systematische Speicherung von Teilen des elektronischen Angebots auf anderen Servern bedarf ebenfalls des schriftlichen Einverständnisses der Rechteinhaber.

## **Haftungsausschluss**

Alle Angaben erfolgen ohne Gewähr für Vollständigkeit oder Richtigkeit. Es wird keine Haftung übernommen für Schäden durch die Verwendung von Informationen aus diesem Online-Angebot oder durch das Fehlen von Informationen. Dies gilt auch für Inhalte Dritter, die über dieses Angebot zugänglich sind.

## PROPRIÉTÉS D'UN SYSTÈME DE DEUX TRIANGLES, OU DE DEUX TÉTRAÈDRES

---

Les remarques qui vont suivre sont tellement simples et évidentes que j'avais quelque peine à les croire nouvelles ; il me semblait qu'elles avaient dû se présenter à l'esprit de beaucoup d'autres mathématiciens. Aussi, les ayant faites depuis longtemps, et en ayant gardé trace dans de vieilles notes, ne me serait-il pas venu à la pensée de les publier, sans le hasard d'une conversation avec un ami, beaucoup mieux informé que moi sur la Géométrie du triangle.

Il m'affirma que ces propriétés n'étaient pas connues de lui et qu'il les croyait réellement nouvelles. S'il n'en est pas ainsi, je m'en excuse à l'avance, et la chose est après tout fort possible ; car la bibliographie de ce chapitre de la science est devenue fort abondante, et personne ne peut guère se tenir au courant de tout ce qui s'imprime dans le monde.

1. — Considérons dans un plan deux triangles  $ABC$ ,  $A'B'C'$ , et deux points  $M, M'$ , qui, rapportés respectivement à chacun d'eux, aient les mêmes coordonnées barycentriques  $\alpha, \beta, \gamma$ .

Prenant une origine arbitraire  $O$ , menons par ce point les vecteurs  $OA_1, OB_1, OC_1, OM_1$ , équipollents et  $AA', BB', CC', MM'$ , chacun à chacun. Le point  $M_1$ , par rapport au triangle  $A_1B_1C_1$  aura encore les mêmes coordonnées barycentriques  $\alpha, \beta, \gamma$ .

En effet, en supposant qu'on ait  $\alpha + \beta + \gamma = 1$ , ce que nous pouvons toujours faire puisqu'il s'agit de coordonnées homogènes, nous avons les deux équipollences

$$OM = \alpha OA + \beta OB + \gamma OC \quad , \quad OM' = \alpha OA' + \beta OB' + \gamma OC' \quad .$$

d'où par différence,

$$MM' = \alpha AA' + \beta BB' + \gamma CC' \quad ,$$

c'est-à-dire,

$$OM_1 = \alpha OA_1 + \beta OB_1 + \gamma OC_1 .$$

Une propriété de ces figures consiste en ce que, si l'on divise dans un même rapport les segments  $AA', BB', CC', MM'$ , en  $A_2, B_2, C_2, M_2$ , le point  $M_2$ , aura encore  $\alpha, \beta, \gamma$  pour coordonnées barycentriques, par rapport au triangle  $A_2 B_2 C_2$ . Cela se voit immédiatement en écrivant les vecteurs  $OA_2, \dots$  sous la forme

$$pOA + qOA', \dots (p + q = 1) .$$

2. — Etant donnés seulement les deux triangles  $ABC, A'B'C'$ , on peut se proposer de déterminer  $\alpha, \beta, \gamma$  de telle sorte que les deux points  $M, M'$  coïncident en  $P$ , et de construire ce point  $P$ , que je propose d'appeler *pôle barycentrique* du système des deux triangles.

Dans ce but, reprenons la figure  $OA_1 B_1 C_1$  considérée ci-dessus, et appelons  $\alpha_0, \beta_0, \gamma_0$  les coordonnées barycentriques de  $O$  par rapport au triangle  $A_1 B_1 C_1$ . On aura

$$\alpha_0 OA_1 + \beta_0 OB_1 + \gamma_0 OC = 0 , \quad \text{ou} \quad \alpha_0 AA' + \beta_0 BB' + \gamma_0 CC' = 0 ,$$

et il en résulte que les points  $M, M'$  considérés ci-dessus, et qui ont pour coordonnées particulières  $\alpha_0, \beta_0, \gamma_0$ , coïncident entre eux; leur position commune détermine donc le point  $P$  cherché, et  $\alpha_0, \beta_0, \gamma_0$  sont les coordonnées de ce point par rapport aux deux triangles.

La construction du point  $P$  est dès lors toute naturelle; les droites  $OA_1, OB_1, OC_1$ , coupant respectivement les côtés  $B_1 C_1, C_1 A_1, A_1 B_1$ , en  $D_1, E_1, F_1$ , si l'on divise  $BC$  en  $D$ , de telle sorte que  $\frac{BD}{DC} = \frac{B_1 D_1}{D_1 C_1}$ , et si de même  $\frac{CE}{EA} = \frac{C_1 E_1}{E_1 A_1}$ , le point  $P$  sera l'intersection des droites  $AD$  et  $BE$ .

On peut même se contenter du tracé des deux droites que  $\frac{PA}{AD} = \frac{OA_1}{A_1 D_1}$ . L'indétermination du point  $O$  pourrait aussi permettre une légère simplification.

Il est clair qu'on pourrait se servir du triangle  $A'B'C'$  au lieu de  $ABC$ .

Tout ceci nous donne en somme la résolution géométrique de l'équipollence  $\alpha AA' + \beta BB' + \gamma CC' = 0$ , où les rapports mutuels de  $\alpha, \beta, \gamma$  sont les inconnues.

Cette construction s'applique aux cas singuliers où les triangles donnés dégénèrent, et se réduisent à des points, ou à des systèmes de trois points en ligne droite; le lecteur n'aura pas de peine à le reconnaître. Nous voulons seulement appeler ici l'attention sur quelques circonstances spécialement intéressantes.

Si le triangle  $A_1B_1C_1$  se réduit à trois points en ligne droite, cette droite ne passant pas par le point  $O$ , il est évident qu'aucun système de coordonnées barycentriques ne permet de rapporter  $O$  à  $A_1B_1C_1$ ; le pôle barycentrique disparaît donc dans ce cas.

Si  $AA', BB', CC'$  sont équipollentes, le triangle  $A_1B_1C_1$  se réduit à un point; et le pôle barycentrique est rejeté à l'infini dans la direction  $AA'$ .

Si  $AA', BB', CC'$  sont parallèles, mais non équipollentes, les points  $A_1, B_1, C_1$  sont sur une droite passant par  $O$ ; les coordonnées  $\alpha, \beta, \gamma$  ne sont pas déterminées entièrement; il y a une infinité de pôles barycentriques, situés sur une droite qui n'est autre que l'axe d'homologie des triangles  $ABC, A'B'C'$ , dont le centre d'homologie est à l'infini.

Si les deux triangles donnés  $ABC, A'B'C'$  sont semblables, leur pôle barycentrique sera leur centre de similitude, directe ou inverse.

Remarquons que pour le triangle  $A_2B_2C_2$  dont nous avons parlé au n° 1, un point rapporté à ce triangle et ayant pour coordonnées  $\alpha_0, \beta_0, \gamma_0$  ne sera autre que  $P$ . Donc le pôle barycentrique de deux triangles  $ABC, A'B'C'$  est commun à tous les triangles dont les sommets divisent  $AA', BB', CC'$  proportionnellement.

3. — Nous allons retrouver le point  $P$  par une méthode qui va nous conduire à une construction encore plus simple. Imaginons (en supposant toujours qu'on ait  $\alpha + \beta + \gamma = 1$ ) que, par rapport au triangle  $ABC$ , nous considérons tous

les points qui ont une valeur donnée  $\alpha$  pour coordonnée barycentrique correspondant à A. Ils sont tous situés sur une parallèle à BC, qui divise la hauteur issue de A dans le rapport  $\frac{\alpha}{1-\alpha}$ . On peut en dire autant pour le triangle A'B'C', et le point de concours des deux parallèles à BC, B'C' est tel que ses distances à ces deux droites sont dans le même rapport que les deux hauteurs correspondantes, issues de A et de A'. Le lieu des points ayant même coordonnée  $\alpha$ , par rapport aux deux triangles ABC, A'B'C', est donc une droite passant par l'intersection de BC, B'C'. Si l'on reprend la même observation, appliquée aux coordonnées  $\beta$  et  $\gamma$ , on a trois droites qui viennent concourir au point P.

Pour la construction effective, il suffit évidemment de déterminer deux de ces droites.

Les considérations qui précèdent amènent en particulier à cette proposition.

*Deux triangles ABC, A'B'C' étant donnés sur un plan, soient a le point de rencontre de BC et B'C', a<sub>1</sub> celui des parallèles à BC et B'C' menées respectivement par A et A'; soient b, b<sub>1</sub> et c, c<sub>1</sub> les points analogues relatifs aux deux autres couples de côtés. Les droites aa<sub>1</sub>, bb<sub>1</sub>, cc<sub>1</sub>, concourent en un même point P.*

Ce point P est le pôle barycentrique des deux triangles.

4. — Le cas des deux triangles directement semblables ABC, A'B'C' offre quelques particularités intéressantes. Ainsi que nous l'avons fait remarquer plus haut, le pôle barycentrique est alors le centre de similitude directe. Il a dès lors mêmes coordonnées homogènes, non seulement barycentriques, mais quelconques, par rapport aux deux triangles.

P désignant ce centre de similitude, nous avons

$$PA' = \lambda PA, \quad PB' = \lambda PB, \quad PC' = \lambda PC,$$

$\lambda$  représentant un rapport complexe, de deux vecteurs.

Si maintenant A<sub>2</sub>, B<sub>2</sub>, C<sub>2</sub>, comme plus haut, sont les points qui partagent les segments AA', BB', CC' dans un même rapport  $\frac{q}{p}$  ( $p + q = 1$ ), nous avons

$$PA_2 = pPA + qPA', \quad PB_2 = pPB + qPB', \quad PC_2 = pPC + qPC',$$

ou

$$PA_2 = (p + \lambda q) PA, \dots$$

et, de là

$$A_2B_2 = (p + \lambda q) AB, A_2C_2 = (p + \lambda q) AC$$

$$\frac{A_2B_2}{A_2C_2} = \frac{AB}{AC}.$$

Les deux triangles  $ABC$ ,  $A_2B_2C_2$  sont donc directement semblables, et par conséquent nous avons la propriété suivante, qui n'est pas nouvelle, mais qui mériterait peut-être plus d'attention qu'on ne lui en accorde d'habitude :

*ABC, A'B'C' étant deux triangles directement semblables, si l'on divise les segments AA', BB', CC' en parties proportionnelles en  $A_2, B_2, C_2$ , le triangle  $A_2B_2C_2$  est directement semblable à chacun des triangles donnés.*

5. — Il est facile de voir que les considérations développées précédemment s'appliquent à deux tétraèdres  $ABCD$ ,  $A'B'C'D'$  donnés dans l'espace ; c'est-à-dire qu'il existe un certain point  $P$  qui, rapporté aux deux tétraèdres aura mêmes coordonnées barycentriques. Nous pouvons appliquer à la détermination de ce point la construction au n° 3. Les plans  $ABC$ ,  $A'B'C'$  se coupent alors suivant une certaine droite ; les plans parallèles menés par  $D, D'$  respectivement, ont une intersection parallèle, et ces deux intersections déterminent un plan  $(d)$  ; en appelant  $(a), (b), (c)$  les trois plans analogues relatifs aux trois autres couples de faces, les quatre plans  $(a)(b)(c)(d)$  auront pour intersection commune le pôle barycentrique  $P$  des deux tétraèdres.

Le cas particulier de similitude nous montre que, dans l'espace aussi bien que dans le plan, il existe un centre de similitude pour deux figures semblables, soit directement, soit symétriquement. Et ce point est aisé à construire, puisqu'il n'est autre que le pôle barycentrique de deux tétraèdres correspondants, attachés aux deux figures semblables considérées.

6. — Il est possible de donner à quelques-uns des résultats précédents une forme mécanique qui se comprend d'elle-même d'après les développements donnés ci-dessus.

Si trois points, dans un plan, ou quatre points, dans l'espace, sont animés de mouvements rectilignes et uniformes, on peut attribuer à ces points des masses telles que leur centre de gravité reste invariable.

Il faut entendre ici par le mot « masse » des coefficients positifs ou négatifs. Pour que les masses soient toutes positives, il faut et il suffit que l'une quelconque des vitesses soit dirigée dans l'angle (ou plan, ou trièdre) opposé à celui que forment les autres vitesses.

C. A. LAISANT.

## THÉORIE DES MIROIRS PLANS PARALLÈLES A UNE MÊME DROITE

1. Supposons  $n$  miroirs plans tous parallèles à une même droite  $l$  et désignons par  $m_1, m_2, m_3, \dots, m_n$  les lignes d'intersection des faces réfléchissantes avec un plan quelconque perpendiculaire à  $l$ .

Considérons dans ce plan les rayons issus d'un point fixe  $R$ . Soit  $r$  un des rayons initiaux et  $r_1, r_2, r_3, \dots, r_n$  les rayons réfléchis successivement par  $m_1, m_2, m_3, \dots, m_n$  (Fig. 1).

Dans sa Géométrie projective<sup>1</sup>, CREMONA examine la construction d'un rayon  $r$  passant par  $R$  et faisant avec  $r_n$  un angle donné à l'avance. On sait que cette construction se déduit d'un problème célèbre de Poncelet<sup>2</sup> consistant à inscrire un polygone dans un autre polygone et dont les côtés passent par des points arbitrairement donnés. En général cette construction possède deux solutions. Mais, pour le problème de Cremona qui est un cas particulier du problème de Poncelet, ce résultat doit être modifié; c'est ce que nous voulons démontrer. Nous en déduirons les propriétés des miroirs angulaires dont on se sert en géodésie.

Pour plus de généralité supposons que la réflexion d'un

<sup>1</sup> *Elements of projective geometry*, p. 199. (édition anglaise).

<sup>2</sup> *Traité des propriétés projectives des Figures*.