

SUR LA NATURE DES AXIOMES DE LA GÉOMÉTRIE

Autor(en): **Richard, J.**

Objektyp: **Article**

Zeitschrift: **L'Enseignement Mathématique**

Band (Jahr): **10 (1908)**

Heft 1: **L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE**

PDF erstellt am: **10.08.2024**

Persistenter Link: <https://doi.org/10.5169/seals-10963>

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Inhalten der Zeitschriften. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern. Die auf der Plattform e-periodica veröffentlichten Dokumente stehen für nicht-kommerzielle Zwecke in Lehre und Forschung sowie für die private Nutzung frei zur Verfügung. Einzelne Dateien oder Ausdrucke aus diesem Angebot können zusammen mit diesen Nutzungsbedingungen und den korrekten Herkunftsbezeichnungen weitergegeben werden. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Die systematische Speicherung von Teilen des elektronischen Angebots auf anderen Servern bedarf ebenfalls des schriftlichen Einverständnisses der Rechteinhaber.

Haftungsausschluss

Alle Angaben erfolgen ohne Gewähr für Vollständigkeit oder Richtigkeit. Es wird keine Haftung übernommen für Schäden durch die Verwendung von Informationen aus diesem Online-Angebot oder durch das Fehlen von Informationen. Dies gilt auch für Inhalte Dritter, die über dieses Angebot zugänglich sind.

SUR LA NATURE DES AXIOMES DE LA GÉOMÉTRIE

(2^{me} article).

Au sujet de mon précédent article sur les axiomes de la géométrie, M. Peano m'a fait l'honneur de m'écrire. L'opinion que je lui prête n'est pas, dit-il, la sienne.

A vrai dire je n'ai pas attribué à M. Peano l'opinion n° 1. Lorsqu'on discute l'indépendance des axiomes, il faut bien les rejeter chacun leur tour, et voir ce que devient dans ces cas la géométrie; faire, comme si ces axiomes étaient arbitraires, faire comme si l'on était de l'opinion n° 1. Voilà à peu près ce que j'ai voulu dire.

La conclusion de mon article manque peut-être un peu de netteté. Depuis que je l'ai écrit, j'ai de nouveau réfléchi sur ce sujet. Voici comment je formulerai actuellement mon opinion.

Il y a deux manières de voir, un peu différentes, mais non contradictoires entre elles.

1^{re} MANIÈRE DE VOIR. La notion d'identité de deux objets, la notion d'un objet qui ne change pas avec le temps est nécessaire à toute science. Le changement lui-même ne peut être conçu que par comparaison à quelque chose d'invariable. Et comme d'autre part rien n'est fixe dans l'univers, il faut bien admettre qu'une figure puisse rester invariable tout en changeant de place par rapport à d'autres. Le concept de figure invariable s'offre ainsi à nous comme une sorte de nécessité; sans lui la science serait impossible.

Mais ce concept est vague; les axiomes ont pour but de le préciser. Admettons les axiomes de la géométrie métrique relatifs aux droites, au plan, à la distance. Les droites, les plans, les distances physiques ne sont définies que par à peu près; elles ne satisfont aussi aux axiomes que par à peu près. On n'a du reste jamais cherché une vérification expérimentale rigoureuse. Elle serait inutile, comme on va voir.

Je nomme *plan*, *droites*, *distances* parfaites, des objets satisfaisant rigoureusement aux axiomes, et ne différant que d'une façon inappréciable des *plans droites distances* physiques.

La première partie de ma phrase constituerait l'opinion n° 3 de mon dernier article. Cette opinion est insoutenable je l'ai montré. La seconde partie de la phrase modifie l'opinion n° 3, et comme on va voir, la rend acceptable.

Reprenons en effet l'objection faite à l'opinion n° 3 soient $\alpha\beta\gamma$ trois quantités définissant un point, et appelées coordonnées provisoires du point.

On nomme $X Y Z$ trois fonctions de $\alpha\beta\gamma$, ne prenant pas toutes trois la même valeur en 2 points différents. Ce seront les coordonnées définitives du point.

Enfin nous nommons *plan* l'ensemble des points dont les coordonnées $X Y Z$ vérifient une équation de 1^{er} degré, *droite* l'ensemble des points communs à deux plans, et distance de deux points $X_0, Y_0, Z_0, X_1, Y_1, Z_1$, la fonction

$$\sqrt{(X_1 - X_0)^2 + (Y_1 - Y_0)^2 + (Z_1 - Z_0)^2}$$

avec ce sens donné aux mots, toute la géométrie euclidienne est vraie. Mais cela, avons nous dit, ne permet nullement de définir le *plan*, la *droite*, la *distance*, car nos trois fonctions $X Y Z$ sont arbitraires.

Mais nous assujétissons maintenant nos trois fonctions à être telles que les *plans*, *droites*, *distances* ainsi définies ne diffèrent pas sensiblement des *plans droites distances* physiques. Ce choix est possible, nous l'admettons. Il reste encore indéterminé. En effet soient $X Y Z$ 3 fonctions satisfaisant à cette condition, ε une quantité inférieure à toute quantité appréciable par des moyens physiques, $\Delta X, \Delta Y, \Delta Z$ trois fonctions arbitraires, mais toujours inférieures en valeur absolue à ε . Les 3 fonctions suivantes,

$$X + \Delta X, Y + \Delta Y, Z + \Delta Z$$

rempliront aussi bien que $X Y Z$ les conditions demandées.

Mais que l'on prenne pour définir la droite, le plan, la dis-

tance, le premier ou le 2^o système de fonctions, cela n'a aucun inconvénient.

Dans la pratique il n'y a aucune différence entre les deux manières de voir, puisque ΔX , ΔY , ΔZ sont inappréciables. En théorie la chose est indifférente, le raisonnement ne s'appuyant pas sur ce qu'on nomme effectivement droite, plan, distance, mais sur les propriétés de ces objets. Ces propriétés sont les mêmes dans l'un et l'autre cas.

2^{me} MANIÈRE DE VOIR. Appelons point, droite, distance, etc., un système d'objets satisfaisant aux axiomes, sans nous préoccuper des autres systèmes d'objets pouvant aussi y satisfaire. Nous établissons ainsi la géométrie. Après la géométrie nous pouvons passer à la mécanique. Nous introduisons d'autres objets il nous faudra d'autres axiomes. Après la mécanique rien ne nous empêchera de passer au moyen d'autres axiomes aux sciences physiques, à l'optique par exemple. Nous aurons ainsi une science purement abstraite très étendue. Alors, si nous avons bien choisi nos axiomes, cette science sera conforme à la réalité. *La science est un édifice logique en correspondance avec la réalité sensible.*

Les axiomes de la géométrie ne sont pas à eux seuls des définitions; on ne peut pas passer au concret sans faire intervenir une notion physique étrangère à la science pure. On ne peut sans instruments vérifier que deux distances sont égales. Le fait que le compas est un solide invariable est un fait étranger à la géométrie, et cette invariabilité ne saurait être démontrée géométriquement.

Les choses sont différentes, si l'on a fait aussi de la physique une science rationnelle. Dans le vide la lumière se propage en ligne droite. Cela se démontre comme on sait à l'aide du principe d'Huygens. La surface de l'onde est une sphère, on l'admet. Il n'y a pas de raison pour que la lumière aille plus vite dans une direction que dans une autre. C'est le principe de la raison suffisante. Mais ce raisonnement nous fournit une droite concrète, le rayon lumineux. En mécanique le principe de l'inertie nous fournit aussi une droite concrète, mais nous ne l'utilisons pas, les difficultés du mouvement

relatif en sont la cause. La statique des fils nous en fournit une autre, le fil tendu.

On voit par là une différence capitale entre les axiomes de la géométrie et ceux des sciences physiques. Les premiers nous donnent une science cohérente en elle-même, mais restant en dehors du domaine réel. Les seconds au contraire nous font pénétrer dans ce domaine. Peut-être trouvera-t-on un jour en étudiant l'optique, quelque contradiction à supposer faux le postulatum d'Euclide. M. Andrade, du reste a déjà trouvé dans la statique non-euclidienne des fils une manière de contradiction.

M. Peano, je l'ai dit plus haut, déclare que l'opinion n° 1, d'après laquelle les axiomes sont arbitraires, n'est pas la sienne.

Effectivement dans un mémoire fort intéressant sur les fondements de la géométrie, (*Rivista di Matematica*, Tome IV) il dit expressément :

« Certes il est permis à chacun d'admettre telles hypothèses
« qu'il veut, et de développer les conséquences logiques
« contenues dans ces hypothèses. Mais pour que ce travail
« mérite le nom de géométrie, il faut que ces hypothèses ou
« postulats expriment le résultat des observations les plus
« simples et élémentaires des figures physiques.....

« En conséquence, au point de vue pratique, il ne me
« paraît pas licite de prendre comme postulat de la géomé-
« trie projective le suivant :

« *Deux droites situées dans un même plan ont toujours un
« point commun.* Car cette proposition ne se vérifie pas par
« l'observation, et même est en contradiction avec les théo-
« rèmes d'Euclide. »

On peut bien, ajoute M. Peano, introduire de nouveaux êtres, (*points idéaux*,) mais par des définitions convenables, et en démontrant que les axiomes sont vrais pour de tels êtres.

A propos de ces points fictifs ou idéaux, je veux faire une remarque concernant le postulatum d'Euclide.

Lorsque la ligne droite est supposée définie, mais pas la distance, le postulat n'est ni vrai ni faux; supposons la distance définie de telle façon qu'il soit faux. Pour le rendre vrai, *par une nouvelle définition de la distance* il faudra ajouter à l'espace des points fictifs. (On suppose que la définition de la ligne droite ne soit pas changée.)

Je supposerai, pour simplifier les choses, le postulat faux mais la constante de la géométrie non-euclidienne extrêmement grande, afin que, DANS UN ESPACE RESTREINT la géométrie diffère extrêmement peu de la géométrie euclidienne.

D'après les travaux de Klein et Cayley, il existera une transformation faisant correspondre à tout point M de l'espace un point M' intérieur à une certaine sphère S . A une droite correspond une droite. A deux points P et Q correspondent deux points P' et Q' et si $P'Q'$ coupe la sphère en A et B , le distance PQ sera égale à k fois le logarithme du rapport anharmonique des 4 points $P'Q'AB$. Nous nommons cette expression la pseudodistance de $P'Q'$, k dépend du choix de l'unité de longueur.

Ainsi la distance PQ est la pseudodistance $P'Q'$.

Donnons maintenant un nouveau sens au mot distance, appelons *distance nouvelle PQ* la distance $P'Q'$.

Ainsi, la distance nouvelle PQ est la distance $P'Q'$.

Comme P' et Q' sont intérieurs à S , $P'Q'$ n'est pas très grand, et la géométrie à l'intérieur de S est sensiblement Euclidienne.

Avec la nouvelle définition de la distance, la géométrie sera donc euclidienne pour tout l'espace.

Mais la distance nouvelle restera finie, et inférieure à un diamètre de la sphère S . Pour la rendre infinie, il faudra introduire des points fictifs, dont les correspondants seraient extérieurs à la sphère S .

(A la vérité la géométrie n'est que sensiblement euclidienne, il serait facile de lever cette difficulté. Cela entraînerait des longueurs. Du reste on peut prendre la sphère S extrêmement petite).

J'ai donc démontré la proposition énoncée.

On peut faire l'inverse. La distance étant d'abord Eucli-

dienne faire une distance nouvelle non-euclidienne. C'est même bien plus facile, mais alors il faut exclure de l'espace des points en faisant d'abord partie. (Je suppose toujours conservé le sens du mot *droite*).

Un changement de sens du mot distance entraîne un changement de sens du mot angle. La droite étant définie, la géométrie est euclidienne ou non selon le sens du mot *angle*. Appelons droite orientée une droite sur laquelle a été choisi un sens positif. Bornons-nous à la géométrie plane soit D une droite orientée, Δ une autre droite orientée dans le même plan. On pourra supposer que la définition de l'angle satisfait à l'axiome suivant : Si deux droites orientées font le même angle avec D , elles font le même angle avec Δ .

C'est là une forme commode du postulatum d'Euclide. Elle ne suppose pas la notion de distance, et ne suppose pas non plus des points à l'infini. Elle permet d'étudier séparément la translation. Cette transformation se définit facilement par des égalités d'angles. Deux droites parallèles sont deux droites orientées faisant les mêmes angles avec une droite orientée D . On pourrait donc aussi commencer la géométrie par les équipollences.

Je n'en dirai pas plus long sur ce sujet, car je suis conduit à cette question : « Comment faut-il enseigner la géométrie élémentaire ? » Cette question mériterait un long développement ; je le traiterai peut-être plus tard : je le ferais mal dans cet article contenant sur la géométrie des réflexions un peu disparates.

J. RICHARD (Dijon).