L'ENSEIGNEMENT DES MATHÉMATIQUES DANS LES ECOLES PUBLIQUES ANGLAISES POUR GARÇONS1

L'ENSEIGNEMENT DES MATHÉMATIQUES DANS LES ECOLES PUBLIQUES ANGLAISES POUR GARÇONS[1]

I

1. — Cette publication se borne uniquement aux conditions qui règnent en Angleterre, à l'exclusion de l'Ecosse, de l'Irlande et du Pays de Galles.

2. — En Angleterre, le terme « d'école publique » a un sens un peu spécial. Par « école publique » on entend généralement une école secondaire, école dotée, instruisant les jeunes gens des classes supérieures et moyennes et indépendante du contrôle de l'Etat sauf lorsque la Caisse publique lui fournit un apport. Les écoles publiques peuvent être soit des internats, soit des externats, mais la plupart sont de la première catégorie.

Il existe d'autres catégories d'écoles secondaires telles que des externats, non dotés, entretenus par des impôts locaux; ces écoles sont de plus en plus nombreuses et importantes et dans bien des cas concourent avec succès avec les écoles dotées plus faibles. Elles se différencient des écoles publiques en ce que leurs règlements sont sous le contrôle d'un bureau du gouvernement, le *Board of Education.*

3. — Les écoles publiques monopolisent l'éducation des classes supérieures du pays. Elles se sont toujours glorifiées de leur exemption d'un contrôle étranger ; chaque école est administrée par son propre corps dirigeant et par son principal, généralement omnipotent. Cette liberté en apparence complète est restreinte par les causes suivantes. En premier lieu, beaucoup d'écoles publiques, trouvent opportun d'accepter l'aide pécuniaire de l'Etat, ce qui impose l'inspection par le « Board of Education. » Les écoles les plus riches et les plus importantes sont en état de se passer de cette aide; mais dans ces dernières années il y a une tendance de la part des principales écoles, à se soumettre volontairement à l'inspection.

---

[1] Rapport adressé au 4e Congrès international des mathématiciens, Rome, avril 1908, à la section IV (Philosophie, Histoire, Enseignement) par C. GODFREY, directeur du R. N. College, Osborne. — Traduit par Renée MASSON, (Genève).

En second lieu, malgré cette indépendance, ces écoles ne sont pas réellement libres ; l'intruction est déterminée en majeure partie par un grand nombre d'examens publics, tels que les examens pour les bourses de collège aux universités d'Oxford et de Cambridge, les examens préliminaires pour les grades dans les universités, les examens pour les certificats d'aptitude dirigés par les universités, les examens pour entrer dans l'armée dirigés par les commissaires du « Civil Service. »

La position d'une école aux yeux du public, son pouvoir d'attirer des élèves et de faire son chemin, dépend en grande partie des succès qu'elle a obtenus dans ces divers concours. Bien peu de réformes peuvent être accomplies sans l'assentiment des autorités inspectrices; ainsi l'étude du grec est obligatoire pour tous les jeunes gens aspirant à un grade dans les universités d'Oxford et de Cambridge et les écoles publiques sont de ce fait obligées d'enseigner le grec à tous ces jeunes gens. On verra que l'influence des corps examinateurs a été toute puissante dans l'enseignement mathématique anglais.

Ce rapport concerne les conditions qui prévalent dans les écoles publiques. Nous donnerons d'abord un aperçu de *l'organisation de l'enseignement mathématique :*

4. — Une école publique est divisée en *classes* (forms), la classification étant déterminée principalement par la force dans les branches littéraires comme le Grec, le Latin, l'Anglais, l'Histoire, la Géographie, l'Ecriture Sainte. Ces sujets sont enseignés par le maître de classe.

Pour les mathématiques un certain nombre de classes forment un *groupe, (block)* et les élèves de ce groupe sont répartis en *séries, (sets)*, suivant leurs aptitudes en mathématiques. Une école de 400 élèves peut être divisée en 4 « groupes » et un « groupe » de 100 élèves peut former de 4 à 6 séries, le nombre de garçons dans une série de mathématique variant de 25 à 15. Les raisons de ce système de répartition pour les mathématiques sont les suivantes : 1° Le maître de classe n'a généralement pas des connaissances très complètes en mathématiques. 2° Les garçons d'une même classe diffèrent beaucoup trop dans leurs connaissances et aptitudes mathématiques pour recevoir un enseignement commun sans nouvelle répartition.

Le *nombre d'heures* affecté à l'enseignement mathématique en classe est de 4-7 heures par semaine avec 1 ou 2 heures de préparation en dehors de l'école. Beaucoup d'écoles ont une section moderne dans laquelle le grec est remplacé par l'allemand et un supplément de mathématiques et de sciences. En classe une grande partie du temps est employée par les élèves à résoudre des exercices écrits, le maître se promenant dans la salle pour leur aider lorsque cela est nécessaire.

Les différentes branches des mathématiques sont enseignées en général par le même maître ; mais dans quelques écoles il y a une organisation différente ; les élèves sont groupés en une classe pour l'Arithmétique et l'Algèbre et une autre pour la Géométrie.

On peut ajouter que le même arrangement est courant pour l'enseignement respectif des langues modernes et des sciences.

5. — Pendant les 2 dernières années d'école, de 17 à 19 ans, il y a une forte tendance parmi les jeunes gens à se spécialiser, le sujet choisi pour une étude spéciale étant généralement un des suivants : langues anciennes, mathématiques, sciences, langues modernes, histoire. Cette spécialisation précoce est le résultat des concours organisés par les Collèges d'Oxford et de Cambridge en vue des bourses destinées à ceux qui se distinguent dans une branche ; de sorte qu'un garçon ayant des aptitudes égales pour les langues anciennes et les mathématiques n'aurait pas de chance s'il était en compétition avec un élève particulièrement fort sur un seul sujet [1]. Il en résulte qu'un candidat à une bourse classique cessera souvent tout travail mathématique et scientifique à l'âge de 17 ans. De même un jeune mathématicien renoncera souvent pendant ses 2 dernières années d'études à toute instruction littéraire ; cependant il n'est que juste de dire qu'il y a une grande différence à cet égard entre les différentes écoles. En tout cas la concurrence entre les écoles pour l'obtention des bourses tend à faire échouer les tentatives de ceux qui trouvent que l'instruction devrait être générale jusqu'à la fin des études scolaires.

6. — Avant d'examiner plus particulièrement les différentes branches mathématiques, il est bon de dire quelques mots des réformes considérables qui ont été réalisées dans l'enseignement mathématique pendant les dernières années. Bien des barrières ont été renversées et on a modifié sur divers points la conception du programme d'études.

7. — Chaque branche peut être envisagée à deux points de vue, suivant qu'on la considère pour sa valeur utilitaire ou disciplinaire. Peut-être les maîtres sont-ils sujets à fixer leur attention sur le dernier point, tandis que la généralité du public considère le premier comme plus important. Il n'est guère nécessaire d'appuyer sur le fait que c'est une erreur de ne considérer qu'un des points de vue. On pourrait soutenir que presque toutes les branches ont été introduites dans les programmes à cause de leur utilité pratique, mais que les maîtres y trouvant une discipline de l'esprit, sont tentés de les conserver même lorsque les circonstances ont détruit leur valeur pratique.

Quoiqu'il en soit, jusqu'il y a dix ans, les mathématiques sem-

[1] Dans certains cas on peut obtenir une bourse pour une combinaison 1° de mathématiques et d'un peu de sciences physiques, 2° de lettres classiques et d'histoire.

blaient être considérées dans les écoles comme une gymnastique mentale. Cette exagération était nuisible, les jeunes gens ne pouvant guère être amenés à s'intéresser à un sujet enseigné pour des raisons qui leur paraissaient futiles. De bons maîtres sentirent la nécessité de renouveler un peu les méthodes afin de moderniser leur travail. Mais le système en vigueur était fixé par les feuilles d'examen et il était évident pour tout le monde que quoique les temps fussent mûrs pour des changements, il n'y en aurait point jusqu'à ce que les examinateurs et les maîtres y fussent poussés par l'opinion publique.

8. — L'impulsion nécessaire vint des ingénieurs. Le temps n'est plus où les ingénieurs méprisaient les mathématiques et se fiaient uniquement au bon sens et à l'intuition joints à une forte réserve de sûreté. Ils disent aujourd'hui qu'on ne peut pas savoir trop de mathématiques pourvu que ce soit de bonnes mathématiques. Une nouvelle période s'est ouverte par la création d'une section d'ingénieurs à l'Université de Cambridge, section dont les diplômés trouvent aisément des places à leur sortie de l'Université.

Les ingénieurs se plaignaient de ce que l'enseignement donné n'avait pas de bases pratiques. En 1902 à la réunion de la *British Association*, à Glascow, M. J. Perry, professeur de Mécanique au « Royal College of Science » à Londres, attaqua l'état de choses existant.

9. — Ce mouvement amena la formation de divers comités qui comparèrent les opinions des hommes du métier et des maîtres d'école et trouvèrent que l'acccord était possible sur la plupart des points. Les professeurs reconnurent que des sujets utiles pouvaient être aussi éducatifs que les futilités conventionnelles qui avaient fini par s'identifier avec les mathématiques enseignées dans les écoles. De même que les mathématiques supérieures pures gagnent en valeur et en intérêt par un contact plus intime avec les problèmes posés par les physiciens et deviennent en revanche irréelles et sans but quand elles sont séparées de leurs applications, de même les mathématiques élémentaires ont trouvé leur salut dans l'introduction des applications sans nombre fournies par la vie industrielle moderne.

Les Universités et les corps examinateurs consentirent à modifier leurs règlements et programmes de façon à entrer dans les vues modernes. Une meilleure situation a été faite aux mathématiques et il est peut-être possible actuellement de porter un jugement sur les conditions nouvelles.

II. — Arithmétique.

10. — Cette branche n'est arrivée que très lentement à occuper une position convenable dans les écoles anglaises. Elle était, à une certaine époque, considérée seulement comme un instrument pour

la comptabilité et le commerce. Le temps était employé, mais sans profit, à se rendre maître des difficultés du système britannique des monnaies, poids et mesures. L'Arithmétique n'était pas enseignée dans ses véritables relations avec les autres branches des mathématiques. Les questions financières prenaient trop de temps et comme on pouvait s'y attendre, étaient souvent devenues singulièrement irréelles entre les mains des maîtres d'école. Un mal plus sérieux résidait dans la quantité considérable de problèmes spéciaux avec des artifices qui encombraient les programmes. Tous les problèmes posés aux examens publics étaient collectionnés par les auteurs de manuels d'exercices et élevés par eux à l'état de modèle, dans des chapitres spéciaux, et y étaient résolus par des méthodes particulières et ingénieuses. C'est ainsi que nous trouvons dans des livres d'exercices courants, des chapitres sur : « des robinets remplissant et vidant des bains, » « sur des courses et sur des jeux d'adresse, » « sur des vaches broutant des champs avec une parfaite égalité. »

L'arithmétique n'était plus guère envisagée qu'avec mépris et on remarqua, qu'à l'âge de 18 ans, certains jeunes gens étaient absolument incapables de faire aucune application utile de l'Arithmétique et ignoraient même complètement le système décimal. L'Arithmétique que ces jeunes gens avaient apprise, inutile dans la vie pratique, dépendait d'une quantité d'artifices particuliers, plutôt que de quelques principes simples et était également inutile comme moyen éducatif. Cette branche était devenue si vulgaire, que des mathématiciens compétents la négligeaient et étaient souvent embarrassés en présence de chiffres et de résultats numériques. Jamais sous aucun prétexte on n'introduisait des données numériques dans la Géométrie. Il était très rare de rencontrer des questions numériques dans les problèmes de mathématiques supérieures posés dans les universités. Il en résulte que les connaissances du mathématicien formé par ce système sont presque entièrement *qualitatives :* il lui arrivera rarement de rechercher une preuve *quantitative* à moins que ses expériences ultérieures n'aient corrigé les effets de l'éducation première.

11. — Les tendances qui caractérisent les *dernières réformes en Arithmétique sont :* 1° simplifier la branche, la débarrasser des règles et expédients particuliers inutiles, supprimer les types artificiels de problèmes, dont l'intérêt originaire a disparu, attacher moins d'importance à l'arithmétique financière.

2° Insister sur l'exactitude et l'habileté dans les plus simples opérations avec les entiers et les fractions décimales, insister sur la compréhension parfaite de la notation décimale et du système métrique, faire comprendre à l'élève de quel nombre restreint de principes et de règles différentes il a à se rendre maître et que pour le reste il peut se fier à son bon sens.

12. — Quelques-uns des meilleurs maîtres sont tentés d'appuyer sur l'étude de la théorie de l'Arithmétique, par exemple de s'appesantir sur les preuves rigoureuses des opérations fondamentales des fractions ordinaires, d'examiner minutieusement le degré d'approximation d'une suite de calculs, etc. D'autres trouvent que, bien que ces sujets soient sans doute dignes d'être mentionnés, ils sont, à cette période, pour la plupart trop difficiles pour être l'objet d'une étude approfondie; ils préféreraient les renvoyer jusqu'au moment où l'élève aura une plus grande maturité d'esprit et aura des connaissances suffisantes de l'algèbre.

13. — L'usage des *tables de logarithmes* à 4 décimales commence à entrer en vigueur. Il y a 10 ans les seules tables que l'on trouvait dans les écoles étaient celles à 7 décimales, qui étaient employées dans la résolution des triangles. Celles-ci n'étaient pas assez maniables et les jeunes gens n'en avaient jamais une habitude assez grande pour employer ces logarithmes avec confiance. Les maîtres de science, cependant, reconnurent l'utilité pratique des tables à 4 décimales et se plaignirent de devoir faire le travail de leurs collègues mathématiciens en en enseignant l'usage. Ceci cesse d'être vrai. On a trouvé qu'un garçon de 14 ans peut apprendre à se servir des tables à 4 décimales et qu'il le fait volontiers et avec compréhension; de cette façon le champ des opérations possibles a été grandement élargi.

14. — Sous le même titre d'Arithmétique il est bon de parler de deux choses qui s'y rattachent très étroitement. Il s'agit, d'une part, de l'*importance des exercices numériques dans toutes les branches*, et, d'autre part, de l'introduction du *travail de laboratoire* dans l'enseignement mathématique.

Importance des exercices numériques dans toutes les branches. La suppression des matières inutiles du cours d'Arithmétique aurait pu avoir l'inconvénient de faire perdre à l'élève l'occasion de s'exercer dans les opérations numériques. Ce danger a été évité par l'usage d'exercices numériques fréquents dans les autres branches, plus spécialement en Géométrie et Trigonométrie. Dans chaque branche on appuye sur la nécessité du contrôle numérique approximatif. Cette tendance se retrouvera plus loin sous différents titres; il suffira de dire ici que cela amène à : 1° l'habileté dans le calcul numérique; 2° une réalisation plus vivante des résultats ainsi illustrés.

15. — Travaux de laboratoire en mathématiques. Actuellement, dans nombre d'établissements, les garçons de 13 à 15 ans, suivent comme faisant partie des mathématiques, un cours de travaux expérimentaux dans un laboratoire. Dans ce cours on leur enseigne à mesurer et à peser. Ils apprennent incidemment à voir les avantages du système décimal, à déterminer les surfaces et les volumes d'objets réels, à déterminer les densités et les poids spécifiques,

à découvrir les lois les plus simples de l'hydrostatique, etc. La quantité de connaissances acquises dans ce cours n'est peut-être pas très grande, mais il n'y a pas de doute sur le fait que ce cours donne un aperçu pratique et vulgarisateur des mathématiques et qu'il satisfait au besoin de coordination entre le cerveau, les yeux et les mains, besoin que bien des maîtres pensent être inhérents à la nature des jeunes Anglais.

III. — Géométrie.

16. — Géométrie plane. Les changements les plus remarquables ont été effectués dans l'enseignement de la Géométrie. Il y a 5 ans les Universités et la plupart des corps examinateurs exigeaient la suite des propositions d'Euclide. Les preuves mêmes d'Euclide n'étaient pas demandées ; mais aucune preuve n'était acceptée si elle violait la suite logique d'Euclide.

Cette restriction était depuis longtemps gênante et il semblait possible de perfectionner la suite d'Euclide. La restriction consacrait et fixait un mode d'enseignement sans vie. Un maître capable avait les mains liées. Il n'y avait pas de place pour l'originalité ou la nouveauté dans la manière de présenter les choses ; on enseignait sans doute beaucoup de bonnes choses, mais la plupart des maîtres se contentaient de développer la mémoire plutôt que la véritable compréhension des démonstrations. Ils considéraient les exercices ou les « déductions » comme au dessus des forces des jeunes gens.

Les constructions étaient très rarement faites avec de vrais instruments. La plus grande partie des jeunes gens n'étaient pas familiarisés avec les notions sur lesquelles ils étaient censés raisonner ; par exemple, il arrivait fréquemment de trouver un élève ayant lu tout le livre II d'Euclide (aire des rectangles) sans faire la distinction entre rectangle et angle droit (right angle).

17. — Le parti réformateur maintenait qu'une perception plus vivante des formes et des propriétés des figures géométriques était nécessaire avant que ces propriétés puissent être exposées logiquement avec profit. Il appréciait tout autant que les conservateurs l'éducation logique que peut fournir la Géométrie, mais il arguait que si la logique doit être plus qu'un mot, il faut premièrement être familiarisé avec le sujet.

Prenons comme exemple le théorème de Pythagore relatif aux carrés des côtés d'un triangle rectangle. L'ancienne méthode d'enseignement consistait à dire : Voici donc un fait remarquable. Nous voulons vous montrer qu'il est possible de partir des principes les plus simples, d'employer des arguments qui convaincront les plus ignorants et d'arriver finalement à ce résultat étonnant.

Les adeptes de la nouvelle école, tout en admettant la nécessité et la valeur du moyen ci-dessus, maintenaient qu'il faut davantage. Il est, disaient-ils, non seulement nécessaire d'intéresser et de conquérir par la force de la logique pure, mais aussi d'inculquer l'art d'appliquer l'œuvre de la logique à de nouvelles conquêtes. Dans le cas du théorème de Pythagore le besoin d'une preuve logique ne se fait pas sentir jusqu'à ce que l'élève ait été convaincu par d'autres moyens que les faits sont bien tels qu'ils ont été énoncés. Il devra mesurer les côtés et calculer les carrés, il devra vérifier l'équivalence en découpant et superposant (et peut-être en pesant). De plus les faits ne devront pas être énoncés crûment comme une chose à vérifier. Ils devront plutôt être présentés de telle façon que l'élève ait l'occasion de penser par lui-même et d'anticiper ainsi les résultats. De toute façon il devra être encouragé à diriger plutôt qu'à suivre.

18. — La Géométrie était considérée comme étant un sujet propre à l'expérience. Pour expérimenter en Géométrie, un enfant doit apprendre à dessiner et mesurer avec une exactitude suffisante. Il peut faire aussi d'autres essais, par exemple en coupant et pliant du papier, en employant du papier quadrillé, du papier transparent, de la ficelle, des blocs de bois, etc. Mais il peut difficilement aller bien loin sans une habitude suffisante des instruments servant à dessiner. Il devra donc, en vue de ces exercices, avoir une règle graduée, un rapporteur (pour mesurer les angles), un compas, une équerre (pour dessiner les perpendiculaires et les parallèles).

Ces instruments lui seront utiles pour une autre raison encore. Un problème de construction n'a pas de signification s'il n'est pas spécifié quels sont les instruments autorisés. Le problème consistant à diviser un angle donné en 3 parties est possible s'il est permis de se servir d'une règle sur laquelle une longueur donnée peut être marquée. Mais le problème est impossible avec les instruments admis par Euclide. Les problèmes de construction ne peuvent donc être entrepris intelligemment sans que l'élève comprenne ces restrictions concernant les instruments et il est peu probable qu'il les comprenne à moins d'avoir manié et s'être servi des instruments autorisés.

De plus, l'usage des instruments géométriques satisfait les besoins d'activité physique de l'enfant. Il réfléchira mieux si ses doigts sont occupés. Des idées lui seront suggérées par l'action de dessiner des figures. Son attitude devient active au lieu de passive.

19. — De pareils arguments ont été employés pour justifier l'usage des instruments dans les écoles. On n'oublia naturellement pas que dans bien des professions le dessin géométrique à une valeur utilitaire, par exemple pour les ingénieurs, l'architecture, la navigation et les travaux militaires. Sous l'ancien système l'enseignement du dessin géométrique avait été séparé de l'étude

théorique de la Géométrie au détriment des deux études. Il était fréquemment enseigné comme une branche des beaux-arts plutôt que comme une branche des mathématiques. Il en résultait un respect exagéré pour le fini artistique et le lavis et, ce qui était plus grave, c'est que le dessin géométrique ne consistait qu'en une vaste collection de règles spéciales et sans relation entre elles; la valeur éducative du sujet était nulle.

20. — Les maîtres demandaient un système d'enseignement géométrique plus libre et plus expérimental, pensant qu'une familiarisation plus grande avec la Géométrie augmenterait sa valeur comme moyen d'éducation logique. D'un autre côté les ingénieurs et les autres critiques s'inquiétaient peu de l'éducation logique, mais désiraient vivement que leurs élèves eussent quelques connaissances géométriques, ce qui n'était évidemment pas le cas avec le système alors en vigueur.

21. — Quoique issu de points de vue différents le besoin d'un changement défini était trop pressant et unanime pour qu'on pût y résister. Les universités revisèrent leurs programmes d'examens. L'université de Cambridge donna le ton de la réforme : 1° en exigeant l'usage des instruments; 2° en acceptant toute preuve d'un théorème qui « paraîtrait aux examinateurs comme faisant partie d'un raisonnement systématique. » Elle publia une liste modeste de théorèmes et constructions qui devaient être considérés comme fondamentaux. Cette liste supprimait du traité d'Euclide quelques-unes des propositions les moins utiles et les moins intéressantes. Le second livre d'Euclide (aire des rectangles) fut reconnu inapte au raisonnement logique formel, des propositions principales furent introduites comme une « illustration géométrique des identités algébriques. »

Un pas important fut fait par l'introduction de « preuves seulement applicables à des grandeurs commensurables. » Le raisonnement d'Euclide pour les proportions est rigoureux et comprend toutes les grandeurs commensurables ou incommensurables. Il est du plus grand intérêt pour un étudiant avancé et pourrait convenablement figurer dans un cours d'université, bien qu'une méthode plus moderne dans l'usage des incommensurables serait sans doute préférable. Mais la théorie d'Euclide était une pierre d'achoppement pour les commençants, et la façon dont elle était généralement enseignée dans les écoles anglaises était incompréhensible, le livre V étant toujours supprimé. L'université décida que la théorie des figures semblables pouvait être étudiée dans les écoles sans s'attaquer prématurément à la théorie beaucoup plus difficile des incommensurables.

Des constructions hypothétiques furent permises; par exemple pour prouver l'égalité des angles adjacents à la base d'un triangle isocèle, on considéra comme légitime d'employer la bissectrice de l'angle au sommet, alors même que la construction de cette bissectrice par la règle et le compas n'avait pas encore été donnée et prouvée à ce moment. On admet de fait le théorème d'existence qu'un angle a une bissectrice. Le choix d'une méthode particulière pour tracer la bissectrice n'est pas considéré comme faisant partie de la discussion.

22. — Le changement de règlement donna libre cours à une grande quantité d'énergie latente. Tous les enthousiastes sentirent qu'ils pouvaient enseigner la Géométrie à leur façon. Il parut un grand nombre de manuels représentant toutes les nuances d'opinion. Comme on pouvait s'y attendre, bien des nouveaux développements furent extravagants et n'eurent pas de durée. Il y eut pendant un temps une tendance à surenchérir sur le côté pratique et expérimental. Mais on comprit vite que cela ôterait toute consistance au sujet. Il doit y avoir un certain élément de sérieux dans toute branche d'étude et au point de vue de l'éducation générale la Géométrie vivra ou tombera suivant son influence sur l'éducation logique. Les plus usités des nouveaux manuels ne différèrent pas de celui d'Euclide dans leur manière d'exposer et de réunir les théorèmes. Quant à la partie expérimentale certains livres la restreignirent à une introduction, tandis que d'autres préférèrent développer les expériences et la théorie simultanément. Dans tous les cas les constructions devaient être faites avec des instruments ; on eut largement recours aux données numériques et à des exemples variés. En ce qui concerne la succession des théorèmes aucun système qui puisse être appelé révolutionnaire n'a obtenu la faveur générale; il n'y a pas eu de séparation radicale avec la tradition euclidienne. Les divers auteurs diffèrent d'Euclide : 1° Par un nouvel arrangement des premiers théorèmes soit dans l'ordre suivant : angles en un point, lignes parallèles, angles des triangles et polygones, triangles semblables. 2° Par les théorèmes relatifs à l'aire des triangles, parallélogrammes et polygones présentés plutôt sous l'aspect de règles de mesure que de théorèmes géométriques.

23. — Quant à l'effet de tous ces changements sur l'éducation, il est peut-être trop tôt encore pour conclure. Nous sommes encore dans la période transitoire. Sans doute les jeunes gens trouvent la Géométrie beaucoup plus intéressante qu'autrefois. Ils ont plus d'habileté pour résoudre les exercices et ne la considèrent plus comme une entreprise sans but. Ils sont capables de mieux *voir* un dessin géométrique. Ils ont acquis de l'assurance et peuvent être facilement poussés à entreprendre de petites recherches pour eux-mêmes; ils font par exemple des levés de plans, etc., et inventent des modèles mécaniques pour illustrer divers points.

D'autre part on peut donner beaucoup moins de temps à écrire des raisonnements formels et il y a quelque raison de penser que les jeunes gens ont perdu quelque chose de leur facilité à exprimer le raisonnement géométrique en mots. C'est un déficit qui se corrigera avec le temps et il vaut peut-être tout autant que le langage euclidien type fasse place à une expression plus individuelle, même au prix d'une diminution dans la précision de l'expression. Il paraissait un moment à craindre que les vérifications expérimentales ne fussent prises comme des preuves, mais la distinction a été si souvent répétée que probablement ce reproche ne peut plus être fait aux nouvelles méthodes.

24. — Géométrie a trois dimensions. La place de cette branche dans les écoles n'est pas encore satisfaisante. Elle ne fait pas encore partie de la Géométrie demandée dans les examens préliminaires d'Oxford et de Cambridge, ce qui ne veut pas dire qu'il serait avantageux de la comprendre dans ces programmes.

Quand un jeune homme a parcouru le cours élémentaire de Géométrie plane, il est censé avoir reçu une éducation suffisante dans les méthodes logiques, pour autant que celle-ci peut être donnée par des études de Géométrie. S'il s'attaque à la Géométrie à trois dimensions (géométrie des solides), son but principal doit être d'acquérir la faculté de réaliser mentalement les relations des figures dans l'espace ; il doit apprendre à « penser dans l'espace. » Parmi les jeunes gens qui étudiaient le livre XI d'Euclide bien peu arrivaient à acquérir cette faculté ; c'est pourquoi on ne peut guère regretter que ce livre ne soit, pour ainsi dire, pas lu dans les écoles.

Pendant des années, des tentatives furent faites par le Département des Sciences et des Arts (maintenant fondu avec le *Board of Education*), pour encourager l'étude de la Géométrie des solides. Des examens publics furent établis pour la Géométrie appelée « Géométrie descriptive [1], » par exemple : La représentation des solides au moyen du plan et de l'élévation et des projections perspectives. Les mêmes jurés examinaient le dessin géométrique dans le plan, et le système d'examen avait malheureusement fini par réduire les deux études à un simple amoncellement de procédés spéciaux, souvent enseignés par des maîtres qui n'avaient pas reçu d'instruction mathématique. Les tentatives échouèrent. L'effet sur les écoles publiques fut nul, ces écoles ne se servant pas des examens du Département.

25. — Un cours satisfaisant de Géométrie à trois dimensions devrait comprendre :

(1) La détermination des surfaces et volumes des solides élémentaires.

(2) La discussion des relations des points, des lignes et des

[1] C'est la « Géométrie descriptive » de Monge, qu'il ne faut pas confondre avec la Géométrie projective ou non métrique de Chasles et d'autres auteurs.

plans dans l'espace. Ceci sans s'attacher à la forme devrait être comparativement simple et illustré par toute sorte de moyens tels que des modèles en carton ou en fil, des vues stéréoscopiques, des ossatures de solides, etc., et être intercalé incidemment dans le cours de Géométrie plane ; par exemple, quand on expose les lignes parallèles et perpendiculaires dans le plan il serait avantageux de discuter les lignes et les plans parallèles et perpendiculaires dans l'espace. En réalité, la première étude de la Géométrie ne devrait-elle pas commencer par s'occuper de solides concrets, pour passer ensuite à des abstractions comme le point et la ligne ?

(3) Un cours des constructions réellement fondamentales en Géométrie descriptive. Probablement que si ce cours était donné intelligemment il ferait plus que tout autre pour développer la faculté de voir dans l'espace.

Il n'existe aucun cours accepté ou donné comme exemple qui réponde à ces conditions. Les maîtres de mathématiques formés par l'enseignement universitaire ignorent généralement absolument la Géométrie descriptive. Ce reproche disparaîtra graduellement, puisque la Géométrie descriptive est exigée dans les nouveaux cours pour l'obtention de grades à Cambridge ; en attendant il faut espérer que ce sujet fera peu à peu son chemin dans les écoles publiques.

IV. — Algèbre.

26.— La réforme dans l'enseignement de la Géométrie fut accompagnée d'une certaine activité en ce qui concerne l'Algèbre. Bien des maîtres et des examinateurs trouvaient que l'enseignement avait donné une trop grande importance aux exercices pratiques au détriment de l'étude intelligente du pourquoi et des causes. On employait certainement beaucoup de temps à résoudre de longues séries d'exercices gradués sur les facteurs, les équations, les fractions, etc. Il y eut une sorte de rébellion contre cette coutume, et les maîtres essayèrent de faciliter le travail en introduisant relativement de bonne heure des graphiques, des tables de logarithmes et d'autres choses intéressantes.

Tout ceci eut un effet stimulant. C'est une révélation pour un élève d'apprendre qu'une fonction d'une variable peut être associée à une courbe ; qu'il peut résoudre des équations, extraire des racines, etc., par des méthodes graphiques.

Comme toujours la réforme alla trop loin. Certains maîtres et certains manuels ne se contentèrent pas de considérer en passant les graphiques, si suggestifs pour un garçon de 13 ans, ils développèrent le sujet jusqu'à empiéter prématurément sur la Géométrie analytique. Il y eut une certaine tendance à abandonner les méthodes analytiques pour les méthodes géométriques et graphiques. La résolution laborieuse des exercices d'Algèbre fut de plus en plus écourtée, de sorte qu'il fut à craindre que les jeunes gens ne devinssent incapables d'employer les expressions algébriques les plus simples.

Le balancier penche maintenant dans la direction opposée. Si ses oscillations peuvent être modérées à temps, on parviendra à obtenir un système qui donnera une habitude suffisante des applications directes et en même temps donnera à la partie graphique la place qu'elle doit occuper dans l'enseignement élémentaire.

27. — Pour parler franchement, il n'est pas facile de déterminer le rôle exact de l'enseignement de l'Algèbre dans l'éducation secondaire. On peut admettre que la conception de l'Algèbre comme généralisation de l'Arithmétique est d'une grande valeur éducative. Lorsqu'un garçon est amené à voir qu'une seule formule algébrique est une sorte de porte-manteaux auquel viennent se rattacher un nombre infini de données arithmétiques, il aura acquis l'une des idées les plus fertiles que l'éducation mathématique puisse lui donner. Cela seul peut justifier l'enseignement de l'Algèbre et ce but peut être atteint sans donner beaucoup de temps à des exercices pratiques.

Ce qui précède est un exemple de ce qu'on peut appeler les *idées* de l'Algèbre. Tout le monde se trouvera bien d'avoir acquis ces idées. La majorité des jeunes gens des écoles publiques n'auront pas l'occasion plus tard, dans leur vie, de se servir des mathématiques qu'ils ont apprises à l'école : on serait tenté de croire que pour cette classe nombreuse de jeunes gens il suffirait des *idées* jointes au minimum d'exercices nécessaires pour les rendre intelligibles.

Il en est autrement au contraire pour ceux qui doivent plus tard se *servir* des mathématiques. Pour eux, l'Algèbre est un instrument indispensable. S'ils n'ont pas de facilité à manier les expressions algébriques, leur chemin sera épineux. Ils ne peuvent pas éviter le travail pénible de résolution des exercices ; et pour le mathématicien, comme pour le musicien, l'habileté est la récompense d'une longue et patiente pratique, pratique qui a peut-être peu de valeur par elle-même, mais est seulement désirable pour le but en vue.

La distinction ci-dessus entre l'amateur et l'étudiant professionnel de l'Algèbre est peut-être sans importance en Angleterre, étant donné que le but de l'éducation anglaise est en somme de passer des examens. Les examens mettent en jeu l'habileté ; mais non les idées. Il s'en suit que tous les jeunes gens anglais reçoivent l'enseignement comme s'ils étaient destinés à se servir plus tard des mathématiques.

V. — Trigonométrie.

28. — Trigonométrie plane. Ce sujet est actuellement introduit de bonne heure dans bien des écoles, soit entre 13 et 15 ans.

Il est convenu que tous les écoliers doivent pouvoir apprendre de la Trigonométrie comme développement de la Géométrie.

Cette introduction précoce est devenue possible grâce à l'habitude d'insister sur la Trigonométrie numérique. Un cours d'introduction de Trigonométrie numérique comprend : le sinus, le cosinus, la tangente des angles aigus, la détermination graphique de ces fonctions, l'usage des tables, la résolution des triangles rectangles et des problèmes pratiques qui en dépendent ; ceci étant en étroite relation avec le dessin à l'échelle qui fait maintenant partie de l'enseignement de la Géométrie. Les autres triangles sont résolus en les décomposant en triangles rectangles.

Traités de cette façon, les commencements de la Trigonométrie ne présentent pas de difficulté. La possibilité d'exécuter le travail à cette période semble dépendre de :

1° Une progression très graduelle et l'exposition des difficultés les unes après les autres, car l'usage, par exemple, des sinus logarithmiques à cette période amènerait de la confusion.

2° L'ajournement de ce que l'on peut appeler la Trigonométrie algébrique, soit par exemple les transformations d'expressions contenant les fonctions trigonométriques.

La résolution des problèmes pratiques est souvent basée sur des observations faites par les élèves avec un théodolite simplifié.

Quand les éléments ont été complètement digérés, on trouve que les progrès sur les sujets ordinaires sont normaux.

VI. — Mécanique.

29. — La Mécanique se borne à la *Statique* et la *Cinématique*. Il n'y a pas de règle uniforme sur ce qui doit être traité en premier. La tendance graphique des dernières années tend cependant à placer la Statique en premier lieu.

La meilleure méthode pour l'étude de la Statique est basée, aujourd'hui, sur un cours expérimental donné dans le laboratoire ou atelier mathématique. Là, l'élève établit le parallélogramme des forces, les lois des moments, du frottement, etc. ; et il apprend à faire les expériences sur des machines simples variées. Ensuite, ou en même temps, il suit un cours de Statique graphique, qui est graduellement combinée avec le raisonnement analytique pour lequel la Trigonométrie l'a préparé. Tout ceci peut être fait à l'âge de 15 à 16 ans.

Si cette méthode est adoptée, la Cinématique vient ensuite. Il n'est pas facile d'organiser des travaux expérimentaux sur ce sujet, et l'enseignement est presque purement théorique. L'élève de force moyenne trouve la Cinématique beaucoup plus difficile que la Statique, et peut-être la Trigonométrie et la Statique formeront-elles pendant un certain temps la limite des études mathématiques de la plupart des jeunes gens d'une école publique.

VII. — **Eléments de mathématiques supérieures.**

30.— Les jeunes gens qui ont l'intention de continuer les études mathématiques à l'université doivent travailler les sujets suivants: Géométrie moderne, Géométrie analytique, Géométrie des sections coniques au point de vue géométrique et analytique, Algèbre supérieure, Trigonométrie, Mécanique, Calcul différentiel et intégral.

Géométrie moderne, comprenant la Géométrie du triangle, les propriétés des pôles et polaires, l'inversion, les projections orthogonales et coniques, etc.

Les coniques sont un sujet auquel on a donné une importance peut-être exagérée dans les écoles anglaises. C'est sans doute dû au fait que Newton avait été forcé de mettre son principe sous une forme géométrique, ses contemporains étant incapables d'apprécier la méthode des « fluxions » par laquelle il était arrivé à ses résultats.

Géométrie analytique, principalement de la droite, du cercle et des sections coniques. Ici encore les sections coniques ont une large part; elles sont étudiées avec beaucoup de détails, et l'élève atteindra une grande habitude dans le maniement de méthodes comme celle des coordonnées trilinéaires par exemple. La tendance moderne cherche à réduire à sa vraie proportion l'étude (analytique et géométrique) des sections coniques et de consacrer plus de temps aux méthodes plus fructueuses de l'Analyse.

Algèbre supérieure, soit: un ensemble hétéroclite et antiscientifique, comprenant la sommation et la convergence des séries, les fractions continues, la théorie des nombres, les inégalités, les probabilités, la théorie des équations, etc. La nomenclature des sujets serait alarmante, si on n'expliquait pas qu'il ne s'agit que de l'étude de propositions élémentaires et isolées.

Trigonométrie supérieure. Espèce d'Algèbre généralement classée par les maîtres d'école comme un sujet à part. Les nombres complexes y font leur première apparition. Les jeunes gens trouvent ce premier travail très attrayant. Plus tard, l'étude des séries et des produits infinis devient laborieuse et bien des maîtres pensent que sous la pression des examens on donne trop d'importance à cette partie.

Calcul différentiel et intégral. Il était autrefois considéré comme le point culminant des mathématiques à l'école. Mais il y a un fort courant, aujourd'hui, en faveur d'un usage précoce de ce calcul. On n'a pas encore précisé à quel moment il peut être commencé, mais il est prouvé qu'une connaissance minime de différentiation et d'intégration simplifie et généralise l'étude de la Géométrie analytique et de la Cinématique, sujets auxquels la tradition assigne un rang antérieur.

C. Godfrey (Osborne).

SUR LES CONGRUENCES DU TROISIÈME DEGRÉ

---

§ 1. — A propos d'un livre récent de M. G. Arnoux[1], M. D. Mirimanoff[2] a présenté aux lecteurs de ce journal quelques observations sur les congruences du troisième degré et les conditions de leur résolubilité. On sait que la détermination effective des racines d'une congruence binôme s'effectue le plus souvent en calculant, dans la série des puissances de la base, un terme dont le rang est assigné par les propositions les plus simples de la théorie des nombres. Comme on peut, par une transformation linéaire, ramener l'équation du troisième degré à la forme cubique pure, on doit présumer que cette même méthode, convenablement modifiée, permettra non-seulement de discerner les cas de résolubilité de la congruence cubique, mais encore d'en trouver les racines au moins dans la majeure partie des cas. En développant cette idée, on reconnaît aisément que la théorie des congruences du troisième degré peut être rattachée à celle des suites récurrentes du second ordre à échelle de relation constante; la résolution se fait alors suivant une marche de tout point comparable à celle donnée par Gauss pour les congruences du deuxième degré.

Un ancien mémoire de G. Oltramare[3] contient dans cette

[1] *Arithmétique graphique. Introduction à l'étude des fonctions arithmétiques*. Paris, 1906.
[2] *L'Enseign. Math.*, 1907, p. 381-384.
[3] *Journ. de Crelle*, 1853, t. 45, p. 316.