III. Parallélisme d'une droite et d'un plan.

Objekttyp: **Chapter**

Zeitschrift: **L'Enseignement Mathématique**

Band (Jahr): **10 (1908)**

Heft 1: **L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE**

PDF erstellt am: **12.07.2024**

DEUXIÈME PARTIE.

III. Parallélisme d'une droite et d'un plan.

5. — DÉFINITION. On dit qu'une *droite* et un *plan* sont parallèles lorsque la droite a tous ses points à la *même* distance du plan.

THÉORÈME I. Si une droite AB a deux points A et B à la même distance l d'un plan P, elle est parallèle au plan.

Démonstration. Des points A et B (fig. 3) menons les perpendiculaires AA′ et BB′ sur le plan P. Ces droites sont parallèles et déterminent un plan R qui coupe le plan P suivant la droite A′B′ ; d'ailleurs, par hypothèse, AA′ = BB′, donc, puisque ces droites sont en outre l'une et l'autre perpendiculaires sur A′B′ le quadrilatère AA′B′B est un rectangle. D'un point M quelconque de AB menons dans le plan R la parallèle MM′ à BB′ par exemple. Cette droite est perpendiculaire au plan P et par suite perpendiculaire sur A′B′ ; le quadrilatère BB′M′M a ses côtés parallèles 2 à 2, c'est donc un parallélogramme et, de plus, c'est un rectangle dans lequel on a MM′ = BB′. Donc la distance au plan P des divers points de AB est partout la même ; cette droite est donc parallèle au plan P. C. Q. F. D.

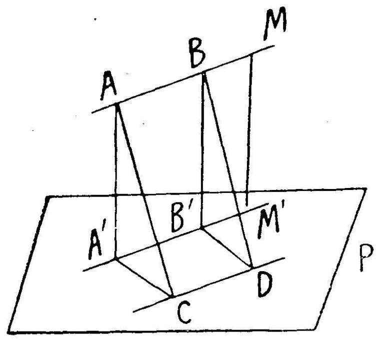

Fig. 3

6. — THÉORÈME II. Si une droite AB est parallèle à une droite CD du plan P, elle est parallèle à ce plan.

Démonstration. De deux points A et B de la droite AB (fig. 3) menons les perpendiculaires AA′ et BB′ sur le plan P. Menons ensuite dans le plan P les perpendiculaires A′C et B′D sur la droite CD et traçons enfin les droites AC et BD.

D'après le théorème des 3 perpendiculaires ces droites sont l'une et l'autre perpendiculaires sur CD ; elles sont par conséquent parallèles et en outre égales puisque les droites AB et CD sont parallèles par hypothèse. Dès lors les deux triangles rectangles AA′C et BB′D ont leurs hypoténuses égales ; en outre leurs angles aigus en A et en B sont égaux parce qu'ils ont leurs côtés parallèles 2 à 2 et de même sens. Donc les deux triangles sont égaux et l'on a $AA' = BB'$. La droite AB a donc deux points à la même distance du plan P ; elle est par conséquent parallèle au plan. C. Q. F. D.

7. — THÉORÈME III. Si par une droite AB parallèle à un plan P, on fait passer un plan Q qui le coupe suivant une droite CD, cette droite est parallèle à la droite AB.

Démonstration. De deux points A et B de la droite AB (fig. 3) menons d'abord les perpendiculaires AA' et BB' sur le plan P ; menons ensuite dans le plan Q les perpendiculaires AC et BD à la droite CD. Ces deux couples de droites sont parallèles 2 à 2 et de même sens et par conséquent les angles aigus A'AC et B'BD sont égaux; dès lors si on trace les droites A'C et B'D on forme deux triangles rectangles, AA'C et BB'D qui ont un côté égal $AA' = BB'$ adjacent à deux angles égaux chacun à chacun ; donc ces triangles sont égaux ; il en résulte $AC = BD$; mais ces droites sont parallèles, et par conséquent le quadrilatère ACDB est un parallélogramme dans lequel CD est parallèle à AB. C. Q. F. D.

8. — THÉORÈME IV. Si une droite AB est parallèle à un plan P et que par un point C du plan on lui mène une parallèle, cette droite est contenue toute entière dans le plan P.

Démonstration. En effet (fig. 3) le point C et la droite AB déterminent un plan Q qui coupe le plan P suivant une droite CD parallèle à la droite AB; mais par le point C on ne peut mener qu'une parallèle à la droite AB; donc la parallèle en question est la droite CD située toute entière dans le plan P.

Remarque particulière. Si par deux droites parallèles AX et BY d'un plan R (fig. 1) on fait passer deux plans P et Q qui se coupent suivant une droite CZ, cette droite est parallèle au plan R.

En effet, la droite CZ est parallèle à une droite AX du plan R, donc elle est parallèle à ce plan.

9. Pour terminer ce paragraphe nous nous bornerons à énoncer les propositions suivantes :

1° Si une droite AB est parallèle à un plan P toute perpendiculaire au plan P est perpendiculaire ou orthogonale à la droite AB.

Corollaire. — Une droite et un plan parallèles sont partout également distants: de sorte que si la droite a un de ses points dans le plan, elle y est contenue toute entière.

2° Les portions de deux droites parallèles comprises entre une droite AB et un plan P qui lui est parallèle sont égales.

3° Si une droite AB est parallèle à un plan P on peut, par une translation rectiligne, placer cette droite dans le plan.

Démonstration. — En effet, par la droite AB (fig. 3) menons un plan Q qui coupe le plan P suivant une droite CD. Puisque ces deux droites sont parallèles on sait que par une translation rectiligne en peut amener AB à coïncider avec CD. La droite AB sera ainsi placée dans le plan P.

C. Q. F. D.

IV. — **Parallélisme de deux plans.**

10. — Définition. On dit que deux plans P et Q sont *parallèles* lorsque l'un des deux a tous ses points à la *même* distance de l'autre.

Théorème I. — Si deux plans P et Q sont perpendiculaires à une même droite LL′, en deux points différents A et B, ces plans sont parallèles.

Démonstration. — Nous allons prouver que le plan P a tous ses points à la même distance AB du plan Q (fig. 4).

Dans le plan P prenons arbitrairement un point C et de ce point menons la droite CD perpendiculaire sur le plan Q. Les droites AB et CD perpendiculaires au plan Q sont parallèles; mais la droite BA est aussi perpendiculaire au plan P, donc il en est de même de sa parallèle DC. Le quadrilatère ABCD a donc ses quatre angles droits; c'est un rectangle dans lequel les côtés opposés AB et CD sont égaux. Le plan P a donc

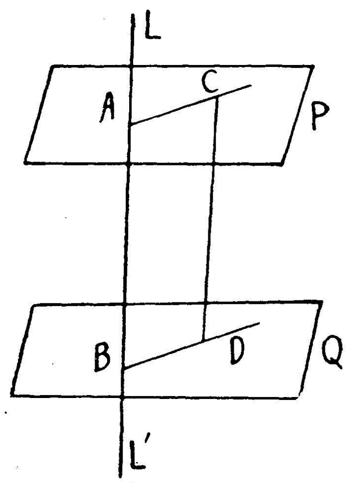

Fig. 4