MÉLANGES ET CORRESPONDANCE

Objekttyp: **Group**

Zeitschrift: **L'Enseignement Mathématique**

Band (Jahr): **10 (1908)**

Heft 1: **L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE**

PDF erstellt am: **10.08.2024**

MÉLANGES ET CORRESPONDANCE

Sur les projections des droites perpendiculaires.

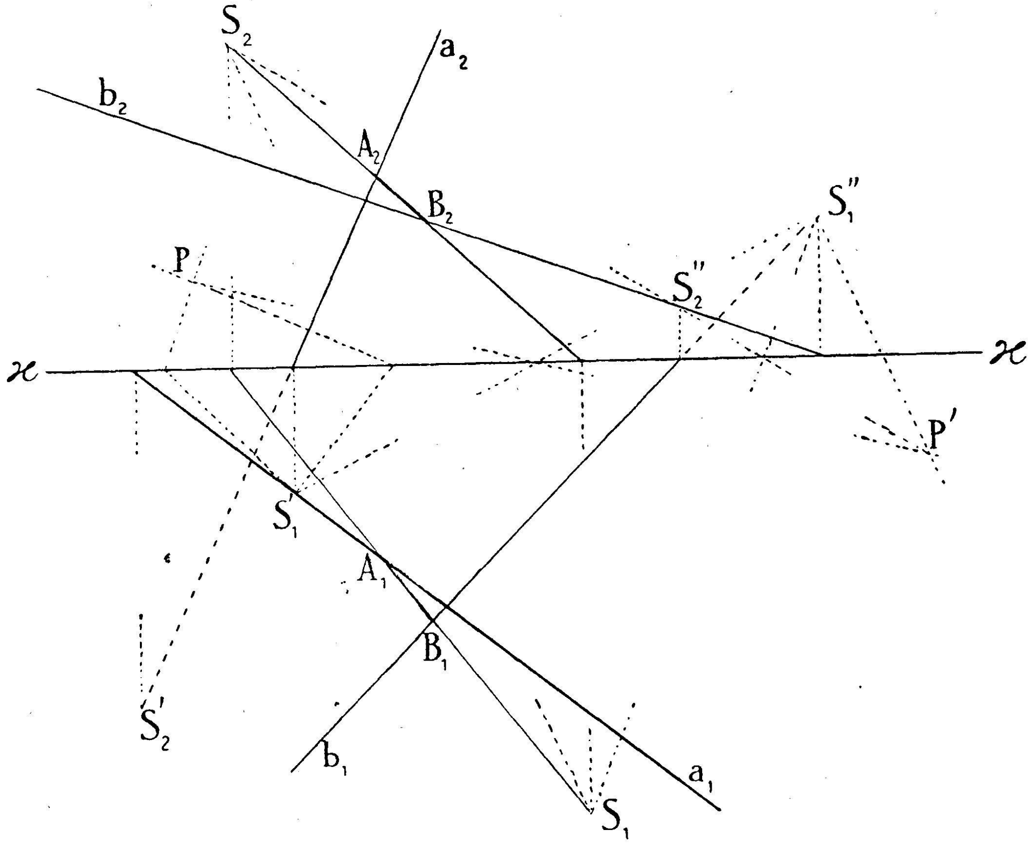
Extrait d'une lettre de M. V. Martinetti (Messine)
à M. G. Loria (Gênes).

L'Enseignement mathématique a publié récemment trois Notes, de MM. Lehr (T. IX, p. 119), Majcen (Id., p. 460) et Loria (T. X, p. 141), sur la condition d'orthogonalité de deux droites représentées par la méthode de Monge. A ces trois manières de formuler la condition, on en peut ajouter une quatrième, qui, à ce que je crois, est nouvelle; son énoncé simple et d'une application facile. Elle peut être considérée comme la traduction graphique de cette propriété bien connue : « lorsque deux droites sont perpendiculaires entre elles, on peut par l'une d'elles mener un plan normal à l'autre, et réciproquement ». En effet de cette proposition on tire :

Etant données les projections orthogonales de deux droites, la condition nécessaire et suffisante pour que deux droites soient perpendiculaires entre elles est que les normales menées par les traces de l'une d'entre elles (supposées déterminées, à distance finie et extérieures à la ligne de terre) aux projections du même nom de l'autre (supposées non perpendiculaires à la ligne de terre) se coupent sur la ligne de terre.

Si l'une des droites considérées se trouve dans une position générale, tandis que l'autre, sans être un rayon projetant, est parallèle à un plan de projection ou située dans un tel plan, la condition que je viens d'énoncer se traduit dans une autre généralement connue. Dans les cas où cette condition cesse d'être applicable il est aisé de la remplacer par un critère *ad hoc* particulier à chaque cas; si par exemple une des droites est normale au premier (second) plan de projection, l'autre droite devra être parallèle au deuxième (premier) ou appartenir à ce plan; si au contraire les deux droites sont perpendiculaires à la ligne de terre, pour qu'elles soient perpendiculaires entre elles, il faut que celle-ci arrive par leurs projections sur le plan de profil. Si les deux droites rencontraient la ligne de terre il faudrait mettre à la place d'une d'elles une droite qui lui soit parallèle et appliquer ensuite le théorème général.

Etant données deux droites qui ne sont pas parallèles entre elles, les droites qui sont perpendiculaires à toutes les deux passent toutes par un point situé à l'infini. Leurs traces sur les plans de projection se correspondent, par conséquent, dans une affinité Ω dont l'axe est la ligne de terre ; le point correspondant dans Ω à un point quelconque P peut s'obtenir sans peine en appliquant la condition exposée ci-dessus par le procédé suivant : si



$a \equiv (a_1, a_2)$, $b \equiv (b_1, b_2)$ sont les droites données, on mène par P les normales à a_1, b_1 ; de leurs points de rencontre avec la ligne de terre on mène les normales à a_2, b_2 ; le point où elles se coupent est le point cherché.

Je remarque en finissant que la plus petite distance entre les droites a, b aura comme traces S_1, S_2 deux points correspondants dans l'homologie Ω ; et les droites qui projetant de S_1, S_2 les traces du même nom de la droite a (ou b), se coupant sur la ligne de terre, seront également des droites correspondantes en Ω. Cette remarque donne une construction, probablement nouvelle et qui n'est pas plus longue que celle que l'on connaît, du problème ayant pour but la recherche de la plus petite distance entre deux droites $a \equiv (a_1, a_2)$, $b \equiv (b_1, b_2)$ (voyez la figure). On trouve les traces S_1' et S_2' de a et les traces S_1'', S_2'' de b ; l'homologie Ω relative aux droites a, b donne les points P', P'' correspondants de S_1' et S_1'' et on les unit respectivement à

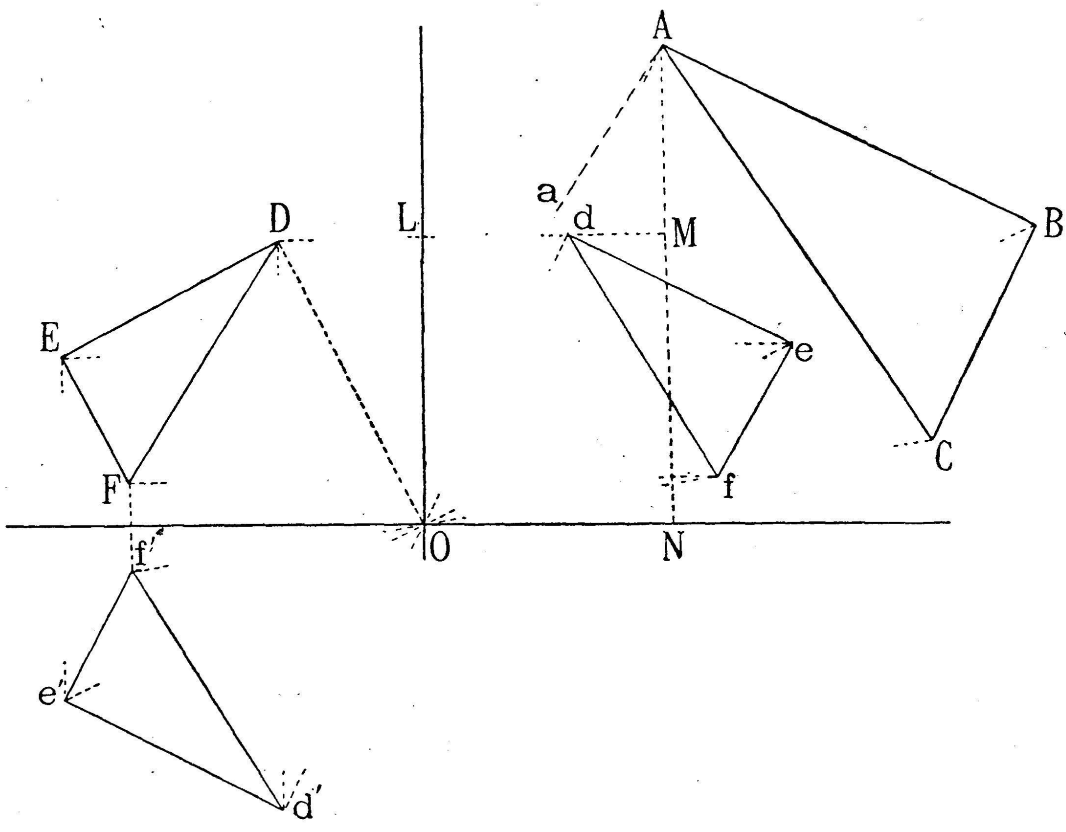
S_2' et S_2''; le point où se coupent ces droites est la seconde trace S_2 de la droite cherchée, tandis que la première est le point qui correspond à S_2 en Ω^{-1}; ayant de la sorte les traces de la droite cherchée, les projections s'ensuivent immédiatement.

30 juillet 1908.

A propos d'un article de M. Laisant sur les Propriétés d'un système de deux triangles ou de deux tétraèdres.

Les élégantes propriétés étudiées par M. LAISANT dans l'*Enseign. Math.* du 15 janvier 1908, me suggèrent le problème ci-après :

Etant donnés deux triangles ABC, DEF symétriquement semblables, ayant m : n *comme rapport de similitude, trouver le centre et les axes de similitude.*



Menez Aa parallèle à DF et la bissectrice AMN de l'angle aAC. Menez DM perpendiculaire à AMN. Prenez sur DM un point L tel que LM : DL $= m : n$ et sur AMN un point N tel que

$$\mathrm{NA} : \mathrm{NM} = m : n \, .$$

Complétez le rectangle LMNO. O sera le centre et OL, ON les axes de similitude.

En effet,

$$\mathrm{DL} : \mathrm{LO} = \mathrm{ON} : \mathrm{NA} \, ;$$

donc

$$\widehat{DOL} = \widehat{NAO} = \widehat{AOL} ,$$

par suite d est le symétrique de D par rapport à OL.

Menez df symétrique de DF. Comme OL est parallèle à la bissectrice des directions DF et AC, df sera parallèle à AC et

$$df : AC = m : n = MN : AN = Od : OA .$$

Par suite Ofc est une ligne droite.

A remarquer que ON est un second axe.

W. Gallatly (Londres).

A propos d'un article de M. A. Pleskot sur la droite de Simson.

Les propositions établies par M. Pleskot dans son article sur une « généralisation du Théorème sur la droite de Simson » *(Ens. math.*, n° de mai 1908, p. 207-211) peuvent se rattacher d'une façon très simple au théorème classique de M. Aubert (*Nouvelles Annales*, 3me série, t. VIII) :

Si deux triangles A B C, abc inscrits dans une conique sont homologiques, et si l'on prend un point D sur la conique, les points de concours α, β, γ *des droites BC et Da, CA et Db, AB et Dc sont situés sur une même droite L passant par le centre d'homologie O.*

On trouvera une démonstration de ce théorème dans le Traité de géométrie de Rouché et Comberousse, t. II, p. 455. La proposition réciproque est également vraie, c'est-à-dire que *si les points* α, β, γ *sont en ligne droite, les triangles A B C, a b c sont homologiques.*

Voici une démonstration simple de cette propriété, qui n'avait peut-être pas été remarquée :

Soient M et N les points d'intersection de la conique et de la droite L, qui est supposée couper en a, b, c, les côtés de A B C. Du point C projetons la ponctuelle ($a_1 b_1 c_1$ M N) ; déterminons les intersections du faisceau projetant avec la conique ; projetons-les du point c_1 ; recoupons par la conique le faisceau ainsi obtenu. Nous formerons ainsi la ponctuelle du second degré (A B C N M) projective à ($a_1 b_1 c_1$ M N). D'autre part, cette dernière ponctuelle projetée du point D donne (a b c M N) projective à chacune des deux précédentes.

Les ponctuelles du second degré(A B C), (abc), dans lesquelles se correspondent doublement les éléments M et N, sont donc en involution. Par conséquent les droites Aa, Bb, Cc sont concourantes, ce qui démontre le théorème proposé.

Si, après avoir constaté l'homologie des triangles A B C, abc, on applique le théorème direct de M. Aubert, on voit que, S étant un point quelconque de la conique, les droites Sa, Sb, Sc, couperont les côtés correspondants de ABC en trois points en ligne droite.

Quand on suppose la droite L rejetée à l'infini, on obtient ainsi le théorème II de M. Pleskot.

Si en outre les points S et D sont diamètralement opposés sur la conique, on obtient le théorème I.

P. DE LEPINEY (Buenos-Aires)

Sur la résolution des équations quadratiques et cubiques, à l'aide des fonctions circulaires et hyperboliques[1].

1. — Supposons connus les premiers éléments de la théorie des fonctions d'un variable complexe, et notamment les équations qui définissent les fonctions hyperboliques et circulaires, l'argument étant réel.

Comme exercice, on se propose souvent de résoudre les équations quadratiques et cubiques. Habituellement on opère sur les formules de résolution elles-mêmes ; mais il nous semble tout aussi intéressant de partir directement de l'équation donnée : c'est ce point de vue que nous cherchons à développer, dans cette petite note.

Afin d'abréger, nous désignons par ε la quantité ± 1 ; nous laissons de côté le cas des racines égales ; enfin, nous supposons que les lettres a, b, c, q et r représentent des quantités essentiellement positives, différentes de zéro.

2. — EQUATION QUADRATIQUE. — Il suffit de considérer la suivante :

$$ax^2 - bx + \varepsilon c = 0 ,$$

que nous écrivons ainsi :

$$\frac{1}{2}\left(\frac{x}{\sqrt{\frac{c}{a}}} + \varepsilon\,\frac{\sqrt{\frac{c}{a}}}{x}\right) = \frac{b}{2\sqrt{ac}}$$

C'est une équation réciproque de forme normale. Soit

$$\mathrm{X} = \frac{x}{\sqrt{\frac{c}{a}}}$$

une des racines : $\frac{\varepsilon}{\mathrm{X}}$ sera nécessairement l'autre.

[1] *L'Enseign. mathém.* a publié en nov. 1900 (t. II, p. 443-447) un intéressant article de M. BARBARIN sur *les fonctions hyperboliques dans l'enseignement moyen* contenant aussi la résolution des équations quadratiques et cubiques. — Voir également *Essai sur les fonctions hyperboliques,* de C.-A. LAISANT. *Réd.*

Trois cas peuvent se présenter.

Premier cas. — Si ε est négatif, nous sommes en droit de poser :

$$\mathrm{Sh}\,\alpha = \frac{e^{\alpha} - e^{-\alpha}}{2} = \frac{b}{2\sqrt{ac}} ,$$

et l'on a immédiatement :

$$x = \pm \sqrt{\frac{c}{a}}\, e^{\pm\alpha} .$$

Deuxième cas. — Si $\varepsilon = 1$ et le rapport $\frac{b}{2\sqrt{ca}} > 1$, il est permis d'écrire

$$\mathrm{Ch}\,\alpha = \frac{e^{\alpha} + e^{-\alpha}}{2} = \frac{b}{2\sqrt{ac}} ,$$

d'où

$$x = \sqrt{\frac{c}{a}}\, e^{\pm\alpha} .$$

Troisième cas. — Si $\varepsilon = 1$ et rapport $\frac{b}{2\sqrt{ac}} < 1$, il faudra poser :

$$\cos\alpha = \frac{e^{\alpha i} + e^{-\alpha i}}{2} = \frac{b}{2\sqrt{ac}} ,$$

d'où

$$x = \sqrt{\frac{c}{a}}\, e^{\pm\alpha i} = \sqrt{\frac{c}{a}}\,(\cos\alpha \pm i\sin\alpha) .$$

Dans le calcul des racines l'on pourrait — nous ne disons pas que le procédé soit très pratique — déterminer l'argument réel α et les exponentielles $e^{\pm\alpha}$, au moyen des tables. (Consulter, par exemple, les « Tables des fonctions cosinus et sinus », par D^r^ Carl Burrau).

3. — Équation cubique. — Il suffit d'étudier la suivante :

$$z^3 + \varepsilon q z - r = 0 .$$

En posant, avec Hudde,

$$z = x + y ,$$

on est conduit à la résolvante

$$u^2 - ru - \varepsilon\frac{q^3}{27} = 0 .$$

admettant x^3 et y^3 comme racines.

Cette réduite peut s'écrire sous la forme, plus commode, à notre point de vue :

$$\frac{1}{2}\left(\frac{u}{\sqrt{\frac{q^3}{27}}} - \varepsilon\frac{\sqrt{\frac{q^3}{27}}}{u}\right) = \frac{\frac{1}{2}r}{\sqrt{\frac{q^3}{27}}} .$$

Cette forme, nous l'avons étudiée ci-dessus. Ici encore, il faudrait distinguer trois cas, et pour chacun de ces cas, nous trouverions des résultats bien connus.

Ainsi, par exemple, quand $\varepsilon = 1$, nous poserons

$$\mathrm{Sh}\,(\alpha + 2k\pi i) = \frac{\frac{1}{2}r}{\sqrt{\frac{q^3}{27}}} ,$$

d'où

$$\left\{\begin{aligned} x &= +\sqrt{\frac{q}{3}}\, e^{\frac{\alpha+2k\pi i}{3}} \\ y &= -\sqrt{\frac{q}{3}}\, e^{-\frac{\alpha+2k\pi i}{3}} \end{aligned}\right. \qquad (k = 0,\, 1,\, 2) .$$

Afin que le produit xy soit réel, il faut prendre la même valeur de k, simultanément dans ces deux relations.

Nous trouverons finalement

$$z = 2\sqrt{\frac{q}{3}}\ \mathrm{Sh}\,\frac{\alpha + 2k\pi i}{3} ,$$

la racine réelle correspondant à $k = 0$.

Louis Casteels (Louvain).

Sur les formules fondamentales des Combinaisons.

Nous nous proposons de montrer dans cette Note que l'on peut obtenir les formules fondamentales des combinaisons en les envisageant comme cas particuliers d'une propriété générale.

A cet effet nous allons d'abord démontrer le théorème suivant sans avoir recours aux expressions P_n, C_m^n et A_m^n .

1. Théorème. — *Etant donnés* p *nombres* $n_1, n_2, \ldots, n_p$ *tels que* $n_1 + n_2 + \ldots + n_p = m$, *le produit*

$$C_{n_1+n_2}^{n_2} \cdot C_{n_1+n_2+n_3}^{n_3} \ldots C_{n_1+n_2+n_3+\ldots+n_p}^{n_p}$$

qui s'écrit plus brièvement

$$\prod_{k=1}^{k=p} \mathrm{C}_{\Sigma_k}^{n_k} \cdot$$

est constant, quelque soit l'ordre dans lequel on épuise les nombres $\mathrm{n_k}$.

En effet, partageons m lettres en p classes, respectivement de $n_1, n_2, \ldots, n_p$ lettres. On peut former la 1^e classe, quant aux lettres qui y entrent de $\mathrm{C}_m^{n_1}$ manières ; les deux premières classes peuvent se former simultanément de $\mathrm{C}_m^{n_1} \cdot \mathrm{C}_{m-n_1}^{n_2}$ manières et ainsi de suite. Enfin, les $(p-1)$ premières classes peuvent être formées de

$$\mathrm{C}_m^{n_1}\, \mathrm{C}_{m-n}^{n_2} \ldots \mathrm{C}_{m-(n_1+n_2+\ldots+n_{p-2})}^{n_{p-1}}$$

manières, tout en *coexistant*. La dernière classe se trouve formée d'elle-même. On voit donc, que le nombre total de manières dont les p classes peuvent coexister est indépendant de la classe choisie comme dernière. De là résulte, avec un changement de notations, le théorème annoncé.

2. Valeur du produit

$$\prod_{k=1}^{k=p} \mathrm{C}_{\Sigma_k}^{n_k}.$$

Chaque manière de former l'ensemble des p classes donne lieu à $\mathrm{P}_{n_1} \cdot \mathrm{P}_{n_2} \ldots \mathrm{P}_{n_p}$ permutations des m lettres. Donc

$$\prod_{k=1}^{k=p} \mathrm{C}_{\Sigma_k}^{n_k} = \frac{\mathrm{P}_m}{\mathrm{P}_{n_1} \mathrm{P}_{n_2} \ldots \mathrm{P}_{n_p}}.$$

3. Corollaires : A. *Expression* de P_m. Faisons $p = m$; $n_1 = n_2 = \ldots = n_m = 1$. Alors (1) donne

$$\mathrm{P}_m = 1 \,.\, 2 \,.\, 3 \ldots m = m\,!$$

B. *Expression* de C_m^n. — Faisons $p = 2$, et l'on voit que (1) est la généralisation de la formule :

$$\mathrm{C}_m^n = \mathrm{C}_m^{m-n} = \frac{m\,!}{n\,!\,(m-n)\,!}\,;$$

celle-ci est donc démontrée.

C. *Expression* de A_m^n. Elle résulte de la formule évidente :

$$\mathrm{A}_m^n = \mathrm{P}_n \cdot \mathrm{C}_m^n \,.$$

4. Remarques. — La formule (1) montre que si $m = \Sigma_{n_k}$, le nombre $\frac{m!}{n_1!\, n_2! \dots n_p!}$ est entier. En particulier $\left[\frac{n(n+1)}{2}\right]!$ est divisible par $1^n 2^{n-1} 3^{n-2} \dots (n-1)^2 n$.

Si nous partageons les m lettres, en n_1 classes de α_1 lettres, etc. en n_p classes de α_p lettres, on a $\alpha_1 n_1 + \alpha_2 n_2 + \dots + \alpha_p n_p = m$. Si l'on décompose alors le nombre m, de toutes les manières possibles sous la forme indiquée, il est visible que l'on a l'identité :

$$\sum \frac{(\alpha_1 - 1)!^{n_1} (\alpha_2 - 1)!^{n_2} \dots (\alpha_p - 1)!^{n_p}}{n!\, n_2! \dots n_p!} \prod_{k=1}^{k=p} C_{\Sigma_k}^{n_k} = m!$$

Si l'on remplace les produits Π par leurs valeurs déduites de

$$\prod_{k=1}^{k=p} C_{\Sigma_k}^{n_k} = \frac{m!}{(\alpha_1!)^{n_1} \dots (\alpha_p!)^{n_p}}$$

on trouve l'identité connue :

$$\sum \frac{1}{n_1!\, \alpha_1^{n_1} n_2!\, \alpha_2^{n_2} \dots n_p!\, \alpha_p^{n_p}} = 1 .$$

J. Malaise (Liège).

CHRONIQUE

Les mathématiques au III[e] Congrès international de Philosophie, Heidelberg, 1908.

Au III[e] Congrès international de philosophie, qui a eu lieu à Heidelberg, du 31 août au 5 septembre derniers, les communications se rattachant aux Sciences mathématiques n'ont pas eu autant de relief que dans les deux Congrès précédents, de Paris (1900) et de Genève (1904).

La cause de ce fait doit peut-être être cherchée dans la séparation, beaucoup plus tranchée, que ce n'est le cas dans d'autres pays, qui subsiste en Allemagne entre les mathématiciens ou physiciens spécialistes et les « philosophes » dans le sens universitaire du mot. Tandis qu'en France par exemple, des savants tels que