Sur les projections des droites perpendiculaires.

Objekttyp: **Chapter**

Zeitschrift: **L'Enseignement Mathématique**

Band (Jahr): **10 (1908)**

Heft 1: **L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE**

PDF erstellt am: **09.08.2024**

MÉLANGES ET CORRESPONDANCE

Sur les projections des droites perpendiculaires.

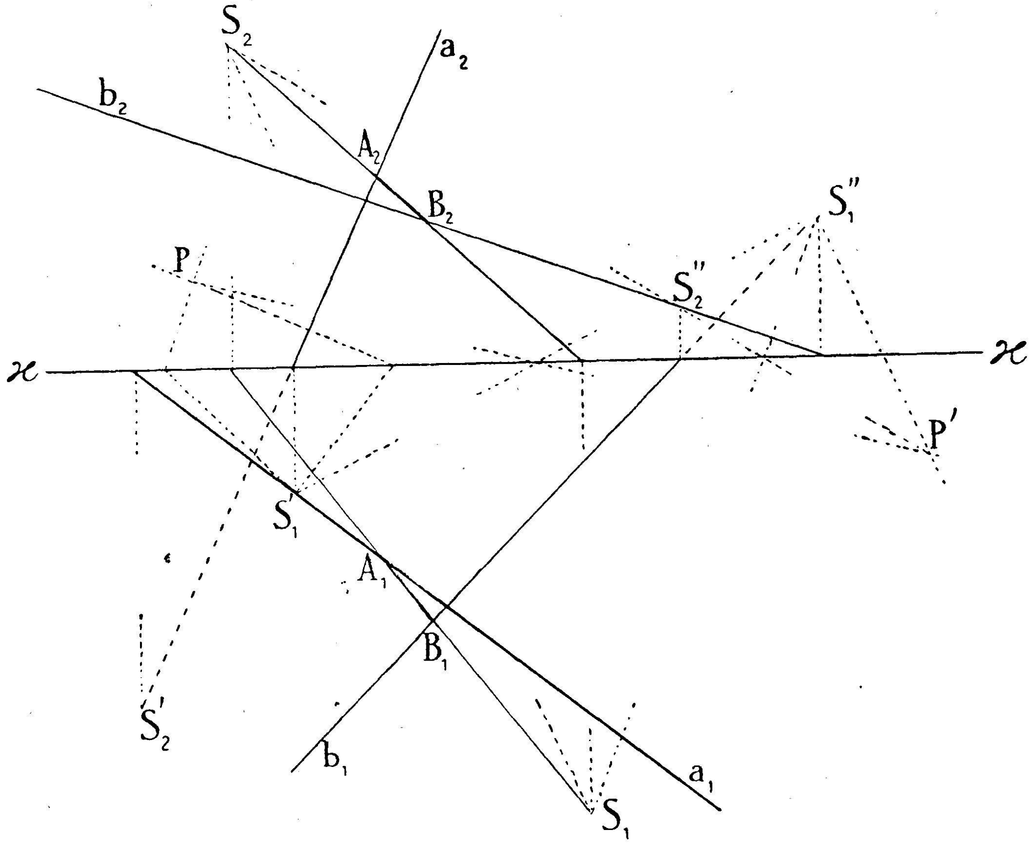
Extrait d'une lettre de M. V. MARTINETTI (Messine)
à M. G. LORIA (Gênes).

L'Enseignement mathématique a publié récemment trois Notes, de MM. LEHR (T. IX, p. 119), MAJCEN (Id., p. 460) et LORIA (T. X, p. 141), sur la condition d'orthogonalité de deux droites représentées par la méthode de MONGE. A ces trois manières de formuler la condition, on en peut ajouter une quatrième, qui, à ce que je crois, est nouvelle; son énoncé simple et d'une application facile. Elle peut être considérée comme la traduction graphique de cette propriété bien connue : « lorsque deux droites sont perpendiculaires entre elles, on peut par l'une d'elles mener un plan normal à l'autre, et réciproquement ». En effet de cette proposition on tire :

Etant données les projections orthogonales de deux droites, la condition nécessaire et suffisante pour que deux droites soient perpendiculaires entre elles est que les normales menées par les traces de l'une d'entre elles (supposées déterminées, à distance finie et extérieures à la ligne de terre) aux projections du même nom de l'autre (supposées non perpendiculaires à la ligne de terre) se coupent sur la ligne de terre.

Si l'une des droites considérées se trouve dans une position générale, tandis que l'autre, sans être un rayon projetant, est parallèle à un plan de projection ou située dans un tel plan, la condition que je viens d'énoncer se traduit dans une autre généralement connue. Dans les cas où cette condition cesse d'être applicable il est aisé de la remplacer par un critère *ad hoc* particulier à chaque cas; si par exemple une des droites est normale au premier (second) plan de projection, l'autre droite devra être parallèle au deuxième (premier) ou appartenir à ce plan; si au contraire les deux droites sont perpendiculaires à la ligne de terre, pour qu'elles soient perpendiculaires entre elles, il faut que celle-ci arrive par leurs projections sur le plan de profil. Si les deux droites rencontraient la ligne de terre il faudrait mettre à la place d'une d'elles une droite qui lui soit parallèle et appliquer ensuite le théorème général.

Etant données deux droites qui ne sont pas parallèles entre elles, les droites qui sont perpendiculaires à toutes les deux passent toutes par un point situé à l'infini. Leurs traces sur les plans de projection se correspondent, par conséquent, dans une affinité Ω dont l'axe est la ligne de terre ; le point correspondant dans Ω à un point quelconque P peut s'obtenir sans peine en appliquant la condition exposée ci-dessus par le procédé suivant : si



$a \equiv (a_1, a_2)$, $b \equiv (b_1, b_2)$ sont les droites données, on mène par P les normales à a_1, b_1 ; de leurs points de rencontre avec la ligne de terre on mène les normales à a_2, b_2 ; le point où elles se coupent est le point cherché.

Je remarque en finissant que la plus petite distance entre les droites a, b aura comme traces S_1, S_2 deux points correspondants dans l'homologie Ω ; et les droites qui projetant de S_1, S_2 les traces du même nom de la droite a (ou b), se coupant sur la ligne de terre, seront également des droites correspondantes en Ω. Cette remarque donne une construction, probablement nouvelle et qui n'est pas plus longue que celle que l'on connaît, du problème ayant pour but la recherche de la plus petite distance entre deux droites $a \equiv (a_1, a_2)$, $b \equiv (b_1, b_2)$ (voyez la figure). On trouve les traces S_1' et S_2' de a et les traces S_1'', S_2'' de b ; l'homologie Ω relative aux droites a, b donne les points P', P'' correspondants de S_1' et S_1'' et on les unit respectivement à

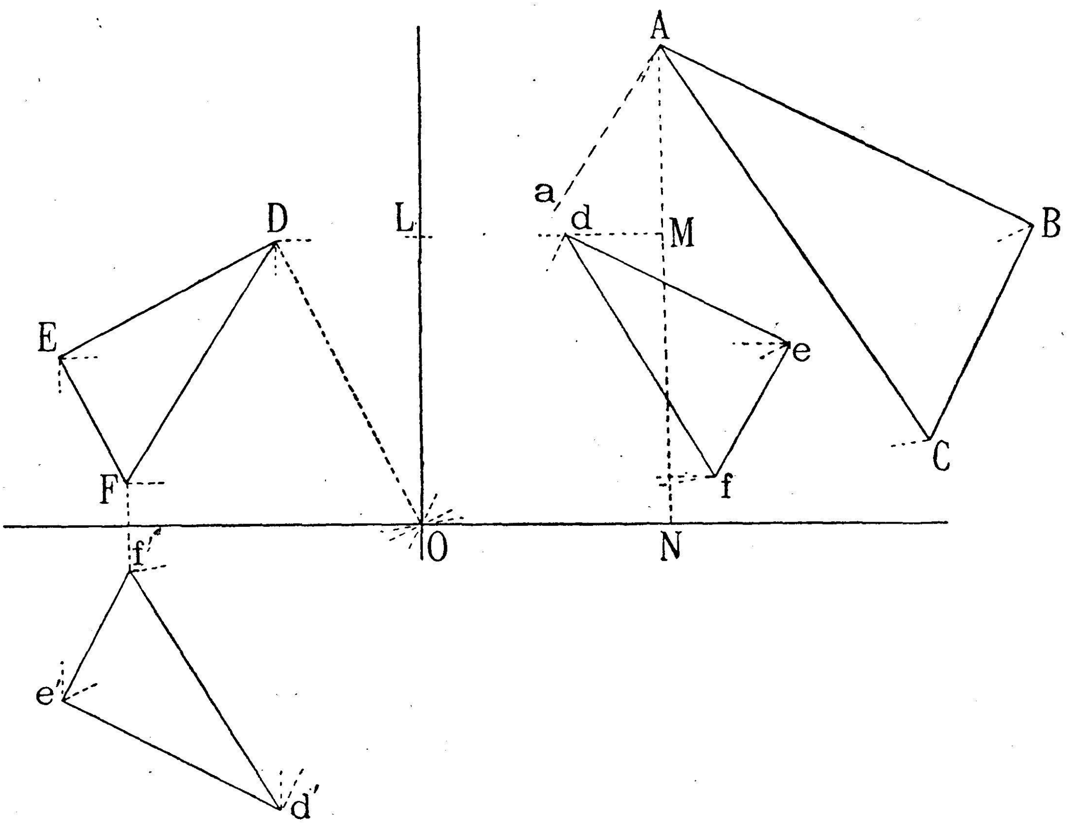
S_2' et S_2'' ; le point où se coupent ces droites est la seconde trace S_2 de la droite cherchée, tandis que la première est le point qui correspond à S_2 en Ω^{-1} ; ayant de la sorte les traces de la droite cherchée, les projections s'ensuivent immédiatement.

30 juillet 1908.

A propos d'un article de M. Laisant sur les Propriétés d'un système de deux triangles ou de deux tétraèdres.

Les élégantes propriétés étudiées par M. Laisant dans l'*Enseign. Math.* du 15 janvier 1908, me suggèrent le problème ci-après :

Etant donnés deux triangles ABC, DEF symétriquement semblables, ayant m : n *comme rapport de similitude, trouver le centre et les axes de similitude.*



Menez Aa parallèle à DF et la bissectrice AMN de l'angle aAC. Menez DM perpendiculaire à AMN. Prenez sur DM un point L tel que $LM : DL = m : n$ et sur AMN un point N tel que

$$NA : NM = m : n .$$

Complétez le rectangle LMNO. O sera le centre et OL, ON les axes de similitude.

En effet,

$$DL : LO = ON : NA ;$$