Sur la résolution des équations quadratiques et cubiques, à l'aide des fonctions circulaires et hyperboliques1.

Objekttyp: **Chapter**

Zeitschrift: **L'Enseignement Mathématique**

Band (Jahr): **10 (1908)**

Heft 1: **L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE**

point quelconque de la conique, les droites Sa, Sb, Sc, couperont les côtés correspondants de ABC en trois points en ligne droite.

Quand on suppose la droite L rejetée à l'infini, on obtient ainsi le théorème II de M. Pleskot.

Si en outre les points S et D sont diamètralement opposés sur la conique, on obtient le théorème I.

P. DE LEPINEY (Buenos-Aires)

Sur la résolution des équations quadratiques et cubiques, à l'aide des fonctions circulaires et hyperboliques[1].

1. — Supposons connus les premiers éléments de la théorie des fonctions d'un variable complexe, et notamment les équations qui définissent les fonctions hyperboliques et circulaires, l'argument étant réel.

Comme exercice, on se propose souvent de résoudre les équations quadratiques et cubiques. Habituellement on opère sur les formules de résolution elles-mêmes ; mais il nous semble tout aussi intéressant de partir directement de l'équation donnée : c'est ce point de vue que nous cherchons à développer, dans cette petite note.

Afin d'abréger, nous désignons par ε la quantité ± 1 ; nous laissons de côté le cas des racines égales ; enfin, nous supposons que les lettres a, b, c, q et r représentent des quantités essentiellement positives, différentes de zéro.

2. — ÉQUATION QUADRATIQUE. — Il suffit de considérer la suivante :

$$ax^2 - bx + \varepsilon c = 0 ,$$

que nous écrivons ainsi :

$$\frac{1}{2}\left(\frac{x}{\sqrt{\frac{c}{a}}} + \varepsilon\,\frac{\sqrt{\frac{c}{a}}}{x}\right) = \frac{b}{2\sqrt{ac}}$$

C'est une équation réciproque de forme normale. Soit

$$X = \frac{x}{\sqrt{\frac{c}{a}}}$$

une des racines : $\frac{\varepsilon}{X}$ sera nécessairement l'autre.

[1] *L'Enseign. mathém.* a publié en nov. 1900 (t. II, p. 443-447) un intéressant article de M. BARBARIN sur *les fonctions hyperboliques dans l'enseignement moyen* contenant aussi la résolution des équations quadratiques et cubiques. — Voir également *Essai sur les fonctions hyperboliques,* de C.-A. LAISANT. *Réd.*

Trois cas peuvent se présenter.

Premier cas. — Si ε est négatif, nous sommes en droit de poser :

$$\mathrm{Sh}\,\alpha = \frac{e^{\alpha} - e^{-\alpha}}{2} = \frac{b}{2\sqrt{ac}}\,,$$

et l'on a immédiatement :

$$x = \pm\sqrt{\frac{c}{a}}\,e^{\pm\alpha}\,.$$

Deuxième cas. — Si $\varepsilon = 1$ et le rapport $\frac{b}{2\sqrt{ca}} > 1$, il est permis d'écrire

$$\mathrm{Ch}\,\alpha = \frac{e^{\alpha} + e^{-\alpha}}{2} = \frac{b}{2\sqrt{ac}}\,,$$

d'où

$$x = \sqrt{\frac{c}{a}}\,e^{\pm\alpha}\,.$$

Troisième cas. — Si $\varepsilon = 1$ et rapport $\frac{b}{2\sqrt{ac}} < 1$, il faudra poser :

$$\cos\alpha = \frac{e^{\alpha i} + e^{-\alpha i}}{2} = \frac{b}{2\sqrt{ac}}\,,$$

d'où

$$x = \sqrt{\frac{c}{a}}\,e^{\pm\alpha i} = \sqrt{\frac{c}{a}}\,(\cos\alpha \pm i\sin\alpha)\,.$$

Dans le calcul des racines l'on pourrait — nous ne disons pas que le procédé soit très pratique — déterminer l'argument réel α et les exponentielles $e^{\pm\alpha}$, au moyen des tables. (Consulter, par exemple, les « Tables des fonctions cosinus et sinus », par D^r^ Carl Burrau).

3. — Equation cubique. — Il suffit d'étudier la suivante :

$$z^3 + \varepsilon qz - r = 0\,.$$

En posant, avec Hudde,

$$z = x + y\,,$$

on est conduit à la résolvante

$$u^2 - ru - \varepsilon\frac{q^3}{27} = 0\,.$$

admettant x^3 et y^3 comme racines.

Cette réduite peut s'écrire sous la forme, plus commode, à notre point de vue :

$$\frac{1}{2}\left(\frac{u}{\sqrt{\frac{q^3}{27}}} - \varepsilon\,\frac{\sqrt{\frac{q^3}{27}}}{u}\right) = \frac{\frac{1}{2}r}{\sqrt{\frac{q^3}{27}}} .$$

Cette forme, nous l'avons étudiée ci-dessus. Ici encore, il faudrait distinguer trois cas, et pour chacun de ces cas, nous trouverions des résultats bien connus.

Ainsi, par exemple, quand $\varepsilon = 1$, nous poserons

$$\mathrm{Sh}\,(\alpha + 2k\pi i) = \frac{\frac{1}{2}r}{\sqrt{\frac{q^3}{27}}} ,$$

d'où

$$\left\{\begin{aligned} x &= +\sqrt{\frac{q}{3}}\, e^{\frac{\alpha + 2k\pi i}{3}} \\ y &= -\sqrt{\frac{q}{3}}\, e^{-\frac{\alpha + 2k\pi i}{3}} \end{aligned}\right. \qquad (k = 0,\, 1,\, 2) .$$

Afin que le produit xy soit réel, il faut prendre la même valeur de k, simultanément dans ces deux relations.

Nous trouverons finalement

$$z = 2\sqrt{\frac{q}{3}}\ \mathrm{Sh}\,\frac{\alpha + 2k\pi i}{3} ,$$

la racine réelle correspondant à $k = 0$.

Louis Casteels (Louvain).

Sur les formules fondamentales des Combinaisons.

Nous nous proposons de montrer dans cette Note que l'on peut obtenir les formules fondamentales des combinaisons en les envisageant comme cas particuliers d'une propriété générale.

A cet effet nous allons d'abord démontrer le théorème suivant sans avoir recours aux expressions P_n, C_m^n et A_m^n .

1. Théorème. — *Etant donnés* p *nombres* $n_1, n_2, \dots, n_p$ *tels que* $n_1 + n_2 + \dots + n_p = m$, *le produit*

$$C_{n_1+n_2}^{n_2} \cdot C_{n_1+n_2+n_3}^{n_3} \dots C_{n_1+n_2+n_3+\dots+n_p}^{n_p}$$