

# I GÉNÉRALITÉS

Objektyp: **Chapter**

Zeitschrift: **L'Enseignement Mathématique**

Band (Jahr): **10 (1908)**

Heft 1: **L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE**

PDF erstellt am: **14.09.2024**

## **Nutzungsbedingungen**

Die ETH-Bibliothek ist Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Inhalten der Zeitschriften. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern.

Die auf der Plattform e-periodica veröffentlichten Dokumente stehen für nicht-kommerzielle Zwecke in Lehre und Forschung sowie für die private Nutzung frei zur Verfügung. Einzelne Dateien oder Ausdrucke aus diesem Angebot können zusammen mit diesen Nutzungsbedingungen und den korrekten Herkunftsbezeichnungen weitergegeben werden.

Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Die systematische Speicherung von Teilen des elektronischen Angebots auf anderen Servern bedarf ebenfalls des schriftlichen Einverständnisses der Rechteinhaber.

## **Haftungsausschluss**

Alle Angaben erfolgen ohne Gewähr für Vollständigkeit oder Richtigkeit. Es wird keine Haftung übernommen für Schäden durch die Verwendung von Informationen aus diesem Online-Angebot oder durch das Fehlen von Informationen. Dies gilt auch für Inhalte Dritter, die über dieses Angebot zugänglich sind.

de groupes analogues aux précédents, mais formés de faisceaux concentriques ou de ponctuelles situées sur une même base. En conséquence, nous étudierons d'abord ces cas spéciaux des groupes sus-mentionnés de la même manière que les ouvrages classiques<sup>1</sup> développent la théorie des faisceaux homographiques concentriques simples et des ponctuelles homographiques simples et de même base.

## I

## GÉNÉRALITÉS

*Faisceaux homographiques concentriques du  $(2 + 1)^e$  degré.*

Nous appellerons faisceaux homographiques concentriques du  $(2 + 1)^e$  degré deux faisceaux formant un groupe du  $(2 + 1)^e$  degré et issus du même sommet.

Comme dans le cas général, deux de ces faisceaux seront évidemment déterminés dès que nous connaissons cinq paires de rayons homologues quelconques.

*Divisions homographiques de même base de la  $(2 + 1)^e$  classe.*

Nous appellerons divisions ou ponctuelles homographiques de même base, de la  $(2 + 1)^e$  classe deux ponctuelles formant un groupe de la  $(2 + 1)^e$  classe et situées sur la même base.

Deux ponctuelles de cette nature seront déterminées également dès que nous aurons cinq paires de points homologues quelconques.

D'après les définitions que nous avons adoptées pour les groupes, il en résulte que toute transversale détermine, sur deux faisceaux concentriques ou non du  $(2 + 1)^e$  degré, deux ponctuelles de la  $(2 + 1)^e$  classe *de même base*. En sachant donc construire deux faisceaux concentriques de cette nature, nous pourrons en déduire, à priori, deux divisions analogues de même base et inversement. Dans ces conditions nous n'aurons qu'à développer les constructions relatives aux faisceaux sans avoir besoin d'une partie dualistique pour les divisions.

<sup>2</sup> W. FIEDLER: *Die darstellende Geometrie*. — T. REYE: *Die Geometrie der Lage*. — R. BÖGER: *Ebene Geometrie der Lage*.

A. Construction de deux faisceaux concentriques  
du  $(2 + 1)^{\text{e}}$  degré.

Les faisceaux sont donnés par les paires,  $Sa$ ;  $Sa_1 - Sb$ ;  $Sb_1 - Sc$ ;  $Sc_1 - Sd$ ;  $Sd_1 - Se$ ;  $Se_1$ . Il reste bien entendu que chaque rayon  $a, b, c \dots$  du faisceau simple correspond à 2 rayons  $a_1$  et  $a_2 - b_1$  et  $b_2 \dots$  du faisceau multiple; par contre chaque rayon de celui-ci ne correspond qu'à un du premier. (Fig. 1.)

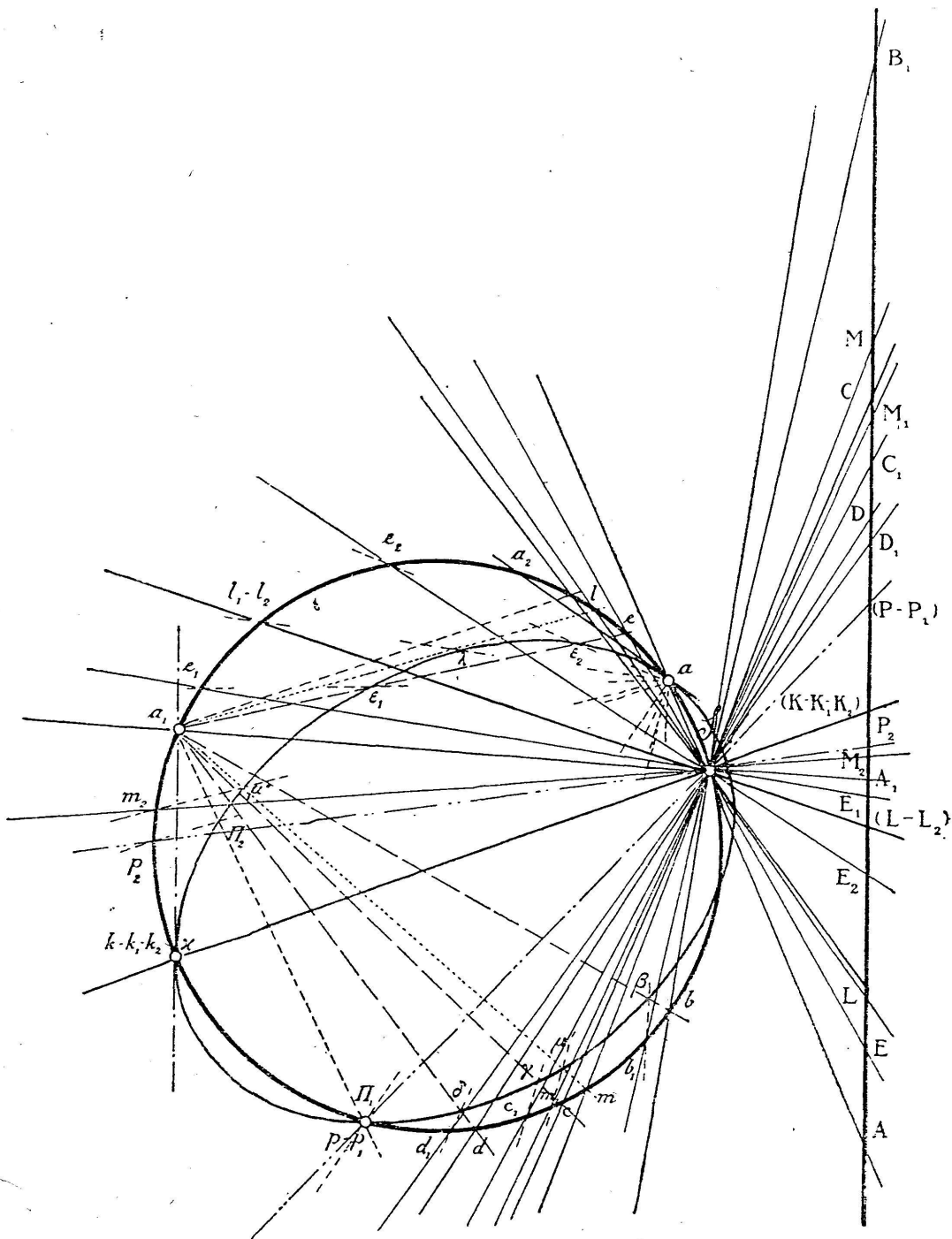


FIG. 1.

Nous coupons ensuite le groupe par une circonférence arbitraire mais passant par le sommet  $S$ . Les points de coupe des rayons avec la circonférence forment deux divisions circulaires homographiques du  $(2 + 1)^{\text{e}}$  ordre. Celles-ci sont déterminées par les points:  $aa_1 - bb_1 - cc_1 - dd_1$  et  $ee_1$ . Les points de la division simple sont:  $abcde$  et ceux de l'autre sont:  $a_1b_1c_1d_1e_1$ . Nous joignons maintenant tous les points de la division multiple avec  $a$  et tous ceux de la division simple avec  $a_1$ . De cette manière, et dans le sens où nous avons défini les groupes du  $(2 + 1)^{\text{e}}$  degré, nous obtenons deux faisceaux homographiques de sommet  $a$  et  $a_1$  formant un groupe du  $(2 + 1)^{\text{e}}$  degré, et possédant un rayon homologue commun  $aa_1$ . D'après notre théorème, le lieu de points de coupe des rayons homologues est une conique passant par les points :

1.  $a$  sommet du faisceau multiple.
2.  $\beta$  point de coupe de  $a_1b$  avec  $ab_1$ .
3.  $\gamma$  » »  $a_1c$  »  $ac_1$ .
4.  $\delta$  » »  $a_1d$  »  $ad_1$ .
5.  $\varepsilon_1$  » »  $a_1e$  »  $ae_1$ .

Cette conique peut être entièrement construite au moyen de ces cinq points et elle nous permettra de déterminer tous les autres rayons du groupe de sommet  $S$ . Si nous voulons obtenir deux rayons conjugués quelconques  $Sm$  et  $Sm_1$  ou  $Sm$  et  $Sm_2$  nous menons par  $a_1$  une transversale qui coupe la conique en  $\mu'$  et  $\mu''$ . Nous joignons  $a\mu'$  et  $a\mu''$  qui sont les homologues de la transversale dans les faisceaux auxiliaires de sommets  $a$  et  $a_1$ . Ces trois droites  $a_1\mu'\mu'' - a\mu' - a\mu''$  déterminent respectivement sur le cercle les points  $m, m_1$  et  $m_2$  constituant deux paires de points conjugués des divisions circulaires. Les rayons cherchés sont ainsi  $Sm, Sm_1$  et  $Sm_2$ .

En faisant tourner la transversale autour de  $a_1$  et en joignant les points de coupe sur la conique avec  $a$  nous obtenons ainsi tous les rayons des faisceaux de sommets  $a$  et  $a_1$ . Ceux-ci déterminent à leur tour tous les points des divisions circulaires et partant tous les rayons du groupe concentrique en  $S$  du  $(2 + 1)^{\text{e}}$  degré.

Si nous considérons en particulier une des paires de rayons



donnés, soit  $Se$ ;  $Se_1$ , nous voyons qu'il existe un deuxième rayon  $Se_2$  du faisceau multiple également conjugué de  $Se$ . Pour l'obtenir menons la droite  $a_1\varepsilon_1$  qui donne encore  $\varepsilon_2$ , sur la courbe;  $a\varepsilon_2$ , donne  $e_2$  sur le cercle et de celui-ci on déduit aisément  $Se_2$ . (Fig. 1.)

Si nous avons eu des divisions à déterminer au lieu de

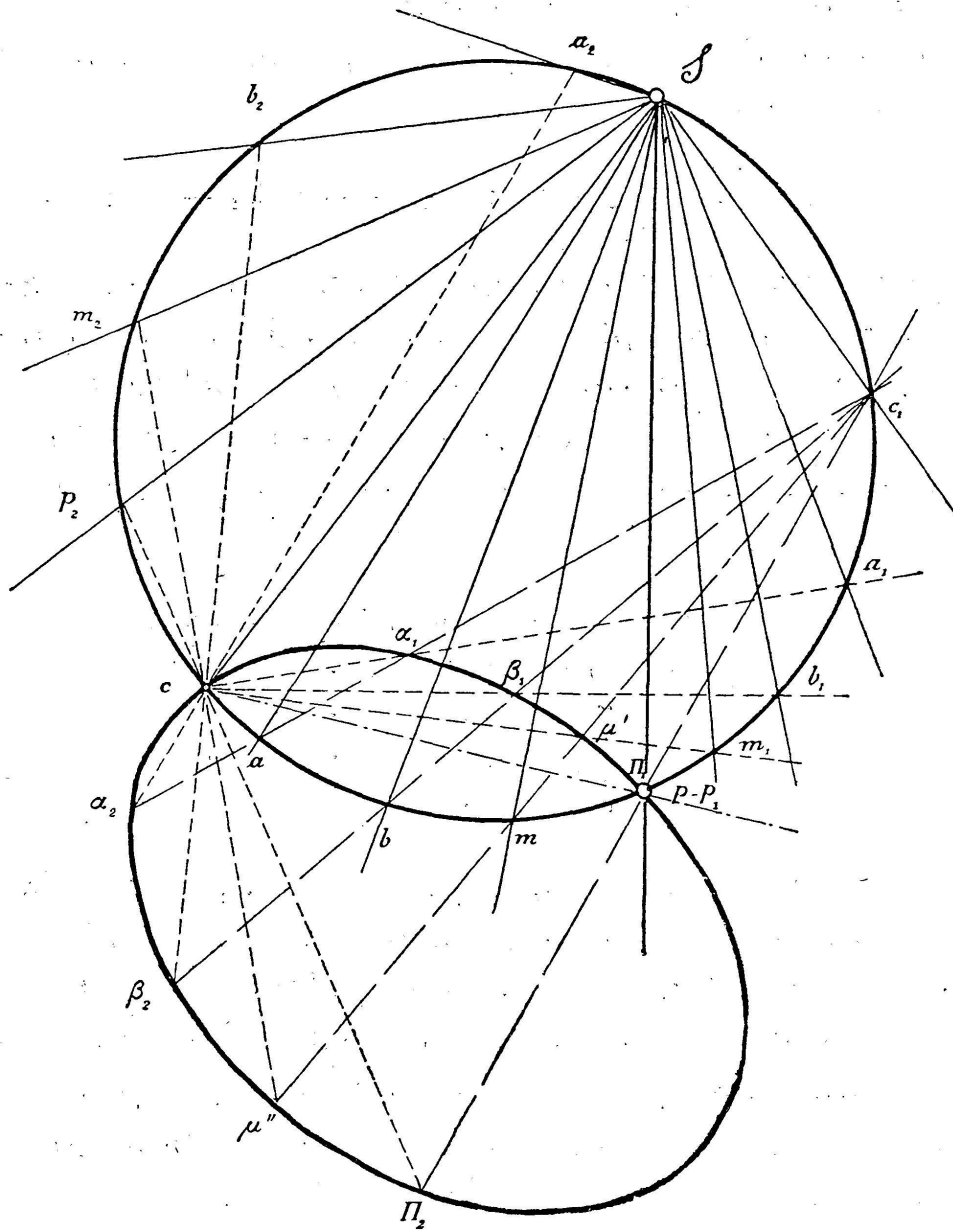


FIG. 2.

faisceaux, nous aurions joint les cinq paires de points homologues donnés  $AA_1 - BB_1 - CC_1 - DD_1 - EE_1$  avec un point arbitraire  $S$  de manière à former un groupe de deux faisceaux comme les précédents. Nous aurions ensuite achevé la construction des rayons de ces faisceaux, comme il vient d'être dit, et chaque paire nouvelle de rayons homologues

aurait donné la paire correspondante de points homologues sur la base commune. (Fig. 1.)

*Cas spécial.* Quand les rayons donnés des faisceaux du  $(2 + 1)^{\text{e}}$  degré sont tels que deux paires du faisceau multiple sont complètes avec chacune leur rayon conjugué du faisceau simple, on peut également appliquer la construction précédente, ou utiliser une autre conique.

Si nous considérons la fig. 2, les paires de rayons homologues donnés sont :

$$Sa ; Sa_1 - Sa ; Sa_2 - Sb ; Sb_1 - Sb ; Sb_2 - Sc ; Sc_1 .$$

Les paires  $Sa_1$  et  $Sa_2$  conjuguées à  $Sa$ , puis  $Sb_1$  et  $Sb_2$  conjuguées à  $Sb$  sont complètes. On peut utiliser les points  $c$  et  $c_1$  pris sur la circonférence comme sommets des faisceaux auxiliaires et former un groupe du  $(2 + 1)^{\text{e}}$  degré. Ce groupe donne naissance à une conique dont nous avons également cinq points. Ce sont :

1.  $c$  sommet du faisceau multiple.
2.  $\alpha_1$  sur  $ca_1$  et  $c_1a$ .
3.  $\alpha_2$  »  $ca_2$  »  $c_1a$ .
4.  $\beta_1$  »  $cb_1$  »  $c_1b$ .
5.  $\beta_2$  »  $cb_2$  »  $c_1b$ .

Les paires de rayons conjugués  $Sm Sm_1$  et  $Sm Sm_2$  sont ensuite déterminées comme précédemment. (Fig. 2.)

*Autre construction.* Nous savons également que les rayons du faisceau multiple sont liés deux à deux et qu'ils forment une involution. Nous pouvons considérer le groupe du  $(2 + 1)^{\text{e}}$  degré comme formé d'un faisceau simple, homographique avec une involution du  $2^{\text{e}}$  degré et de même sommet. En coupant le groupe par un cercle passant par  $S$ , nous pouvons rappeler que les sécantes joignant les points correspondants de l'involution circulaire ainsi obtenue, forment un faisceau concentrique de sommet  $P$ . (Fig. 3.) Chaque rayon de ce faisceau correspond à un rayon du faisceau simple en  $S$ . Nous avons ainsi deux nouveaux faisceaux homographiques simples de sommets  $S$  et  $P$  qui engendrent une conique.

Les éléments donnés sont :  $Sa ; Sa_1 - Sa ; Sa_2 - Sb ; Sb_1$

—  $Sb$ ;  $Sb_2$  —  $Se$ ;  $Se_1$ . Les transversales  $a_1a_2$  et  $b_1b_2$  donnent le point P.

Le rayon  $Pa_1a_2$  est conjugué de  $Sa$  et donne  $\alpha$  de la conique auxiliaire.

»	$Pb_1b_2$	»	$Sb$	»	$\beta$	»	»
»	$Pc_1$	»	$Sc$	»	$\gamma$	»	»

Les points P et S sont encore deux points de cette conique, laquelle est ainsi complètement déterminée.

En laissant une sécante mobile tourner autour de P, elle donnera sur la conique un point  $\nu$  et sur la circonférence les

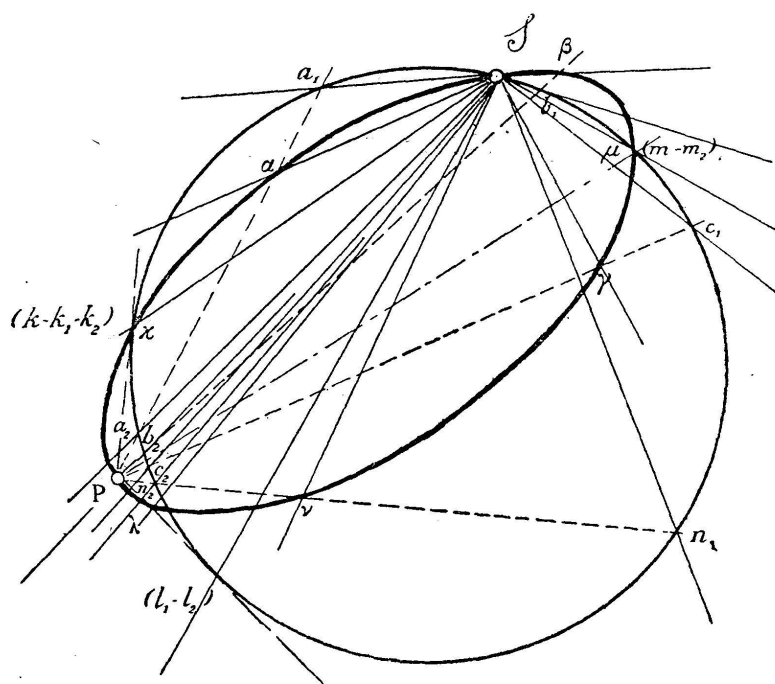


FIG. 3.

points  $n_1$  et  $n_2$ . Au premier correspond le rayon  $Sn$  ou  $S\nu$  et aux autres les rayons  $Sn_1$  et  $Sn_2$  tous deux conjugués du premier. Les diverses positions de cette sécante donneront ainsi toutes les paires de rayons homologues des deux faisceaux concentriques du  $(2 + 1)^{\text{e}}$  degré. Cette construction relative à des données spéciales est également applicable aux divisions du  $(2 + 1)^{\text{e}}$  degré situées sur une même base.

*Remarque.* Les points correspondants de la division multiple circulaire comme  $m_1$  et  $m_2$  ou  $e_1$  et  $e_2$  que nous avons déjà trouvés dans la première construction forment évidemment la même involution que dans la deuxième construction

et comme pour ce dernier cas ils sont situés sur des transversales concourantes en un point P.

### B. Points et rayons particuliers.

#### 1. Rayons doubles du 2<sup>e</sup> degré.

Nous désignerons sous ce nom les rayons  $Sl_1$  et  $Sl_2$  du faisceau multiple qui tombent ensemble mais qui restent différents de leur conjugué  $l$  du faisceau simple.

Dans la fig. 1 ces rayons sont donnés par les tangentes de la conique auxiliaire issues de  $a_1$ . On joint le point de tangence  $\lambda$  avec  $a$  pour obtenir les points doubles correspondants de la division circulaire. Il reste à mener les rayons  $Sl_1$  et  $Sl_2$  issus de S par ce nouveau point. On a évidemment deux rayons de ce genre réels, imaginaires ou confondus. (Fig. 1.)

Dans la deuxième construction (fig. 3), ce sont les tangentes au cercle issues de P qui donnent les points doubles de la division circulaire. On joint ceux-ci à S et on a les rayons cherchés.

Quand il s'agit de points doubles du 2<sup>e</sup> degré pris sur deux divisions de même base, on prolonge les rayons doubles des faisceaux concentriques correspondants menés par S jusqu'à cette base.

#### 2. Rayons doubles du 3<sup>e</sup> degré.

Nous appellerons rayons doubles du 3<sup>e</sup> degré deux rayons homologues confondus tels de  $Sp$  et  $Sp_1$ .

Pour obtenir ces rayons, considérons dans la fig. 1, un des points de coupe de la conique avec le cercle et désignons le par  $\pi_1$ . La transversale  $a_1\pi_1$  donne également deux rayons

#### 1. Points doubles du 2<sup>e</sup> degré.

Nous entendons par points doubles du 2<sup>e</sup> degré deux points comme  $L_1$  et  $L_2$  de la division multiple, qui sont confondus mais qui restent différents de leur homologue L de la division simple.

#### 2. Points doubles du 3<sup>e</sup> degré.

Les points doubles du 3<sup>e</sup> degré sont les points formés par deux homologues P et P' confondus.

par  $a$  soit  $a\pi_1$  et  $a\pi_2$ . Sur le cercle  $a_1\pi_1$  donne  $p$ ,  $a\pi_1$  donne  $p_1$  et  $a\pi_2$  donne  $p_2$ . Comme  $\pi_1$  est déjà sur le cercle  $p$  et  $p_1$  seront donc confondus avec  $\pi_1$ . Les rayons passant par S seront  $Sp$ ,  $Sp_1$  et  $Sp_2$ , les deux derniers étant les homologues du premier. Les rayons homologues  $Sp$  et  $Sp_1$  seront donc confondus tandis que  $Sp_2$  ne donne rien de particulier.

Le nombre des rayons doubles du 3<sup>e</sup> degré dépend ainsi du nombre des points de coupe des deux courbes en dehors du point  $a$  qui est le sommet du faisceau multiple auxiliaire.

Nous avons donc trois points de coupe possibles différents de  $a$  dont deux peuvent être imaginaires. Il en résulte ainsi : *Les faisceaux concentriques formant un groupe du  $(2 + 1)^e$  degré ont trois rayons doubles du 3<sup>e</sup> degré dont deux peuvent être réels, imaginaires ou confondus.*

La conique auxiliaire utilisée dans la première figure dépend de deux faisceaux de sommets  $a$  et  $a_1$ . Il est aisé de voir qu'elle est tangente au rayon  $aa_2$  en  $a$ . Si l'on avait pris les sommets des faisceaux auxiliaires en  $a$  et  $a_2$ , la nouvelle conique eût été tangente au rayon  $aa_1$  en  $a$ . D'un autre côté les points doubles du 3<sup>e</sup> degré sur le cercle sont des points fixes de celui-ci. *Ils appartiendront ainsi à toutes les coniques auxiliaires.* Les deux coniques correspondant aux faisceaux de sommets  $a$  et  $a_1$  ou  $a$  et  $a_2$  passeront par ces trois points et par le point  $a$ .

Les sommets des faisceaux auxiliaires peuvent être deux points homologues quelconques  $x$  et  $x_1$ . D'après ce qui précède la conique correspondante passera par les trois points doubles et par le point  $x$ .

On passe des rayons doubles du 3<sup>e</sup> degré, aux points doubles de même nature des divisions situées sur une même base, en prolongeant les rayons en question jusqu'à cette base.

Dans la figure 3, toute transversale  $P\mu$  passant par un point de coupe de la conique et du cercle donne sur le cercle les points  $m_1$  et  $m_2$  tels que  $m_2$  est confondu avec  $\mu$ . D'autre part  $S\mu$  donne également  $m$  sur le cercle confondu avec  $\mu$  ou  $m_2$ . Donc les rayons homologues  $Sm$  et  $Sm_2$  sont confondus et constituent une paire de rayons doubles du 3<sup>e</sup> degré. En dehors du point S, les deux courbes ont encore trois points

communs. Donc cette construction nous montre également que les faisceaux homographiques concentriques du  $(2 + 1)^e$  degré ont trois rayons doubles du  $(2 + 1)^e$  degré, dont deux peuvent être imaginaires.

Dans la fig. 3 nous avons considéré la conique auxiliaire comme provenant de deux faisceaux simples, un de sommet P et l'autre de sommet S. Nous aurions pu prendre ce deuxième sommet en un point quelconque du cercle  $a_1$ ,  $a_2$ , etc. appartenant à la division circulaire multiple. La conique auxiliaire eût passé par les trois points doubles du  $3^e$  degré des divisions circulaires par P et par  $a_1$ . Toutes les coniques ainsi formées auraient constitué un faisceau de coniques dont les quatre points fixes auraient été les trois points doubles en question et le point P.

### 3. Rayons triples.

Les rayons triples de deux faisceaux homographiques concentriques, du  $(2 + 1)^e$  degré sont formés par un rayon du faisceau simple confondus avec ses deux homologues du faisceau multiple.

Exemple :  $Sk$  confondu avec  $Sk_1$  et  $Sk_2$ .

### 3. Points triples.

Les points triples de deux divisions homographiques de même base de la  $(2 + 1)^e$  classe sont formés par un point de la division simple confondu avec ses deux homologues de la division multiple.

Exemple :  $K$  confondu avec  $K_1$  et  $K_2$ .

Ce cas sera réalisé dans la première construction (fig. 1) quand la transversale issue de  $a_1$  et passant par un des points de coupe de la conique avec le cercle sera en même temps une tangente de la conique. Les points conjugués  $kk_1$  et  $kk_2$  des divisions circulaires seront tous confondus au point de coupe  $z$  des deux courbes. La droite  $Sz$  donnera ainsi le rayon triple. On peut avoir 0, 1 ou 2 rayons triples suivant que les tangentes de la conique issues du point  $a_1$ , ne passent pas, passent par un point de coupe des deux courbes ou passent par deux points de coupe de ces courbes.

Dans la fig. 3. le rayon triple sera donné par une transversale issue de P passant par un des points de coupe des deux courbes et en même temps tangente au cercle.

4. Rayons rectangulaires conjugués.

Etant donné deux faisceaux homographiques concentriques du  $(2 + 1)^e$  degré, nous appellerons rayons rectangulaires conjugués des rayons tels que  $Sm$  et  $Sm_1$  qui sont homologues tout en étant perpendiculaires l'un à l'autre. Le deuxième rayon conjugué de  $Sm$  soit  $Sm_2$  dépend des deux autres sans présenter de propriétés spéciales.

Pour obtenir ces rayons par la première méthode de construction nous observons que les solutions cherchées  $Sm$  et  $Sm_1$  dépendent de rayons  $a_1m$  et  $am_1$  passant par les extrémités d'un diamètre  $mm_1$ . Leur recherche dépend maintenant du problème suivant :

*Problème :* Etant donné deux points fixes d'un cercle  $a$  et  $a_1$  et un diamètre mobile de celui-ci, déterminer le lieu géométrique des points de coupe des rayons joignant les extrémités du diamètre aux points fixes donnés.

*Solution :* Dans la fig. 4 considérons le diamètre  $xy$ ; il donne les droites  $xa_1$  et  $ya$ ; après une demi-révolution  $y$  vient en  $x$  et vice-versa; le rayon  $ya$  donne  $xa$  et  $xa_1$  donne  $ya_1$ . Dans ce cas les rayons  $ya_1$  et  $ax$  ne sont pas à considérer sur le diamètre  $xy$  mais bien sur un nouveau diamètre obtenu après une demi-révolution.

Dans ces conditions à tout diamètre  $xy$  ne correspondent que deux droites conjuguées  $xa_1$  et  $ya$ . Si  $xy$  tourne autour du centre de manière à ce que  $x$  décrive toute la circonférence  $xa_1$  et  $ya$  engendreront deux faisceaux homographiques simples de sommet  $aa_1$  et les points de coupe de ces rayons se trouveront sur une conique passant par  $a$  et  $a_1$ . Nous déterminons la nature de cette conique en observant que deux rayons du faisceau  $a$  comme  $ax$  et  $am_1$  correspondent dans le faisceau  $a_1$  à  $a_1y$  et  $a_1m$  et donnent :

$$\sphericalangle xa m_1 = \frac{1}{2} \text{ arc } xm_1 = \frac{1}{2} \sphericalangle xom_1$$

$$\sphericalangle ya_1 m = \frac{1}{2} \text{ arc } ym = \frac{1}{2} \sphericalangle yom$$



Ces angles sont égaux ; donc les angles compris entre les rayons homologues correspondants des deux faisceaux sont égaux. Nous avons dès faisceaux homographiques égaux ; donc la conique qu'ils engendrent est un cercle passant par  $a$  et  $a_1$ . D'un autre côté il est aisé de voir que ce cercle est tangent aux rayons  $oa_1$  et  $oa$ . Il en résulte maintenant que, ce cercle est complètement déterminé.

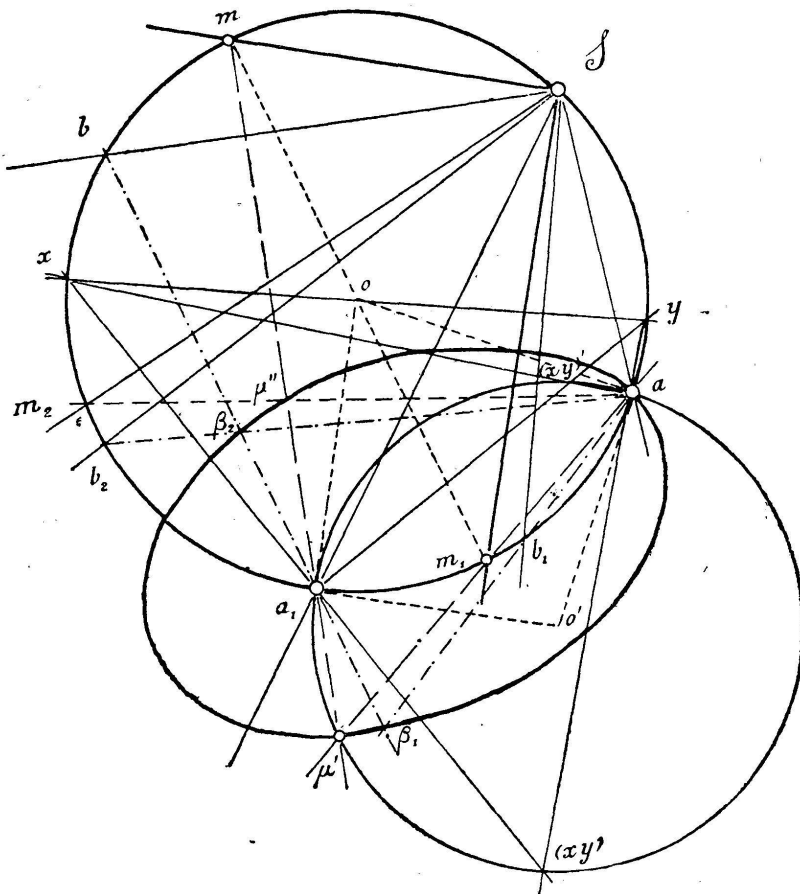


FIG. 4.

Si nous considérons de nouveau les faisceaux du  $(2 + 1)^e$  degré en  $a$  et  $a_1$  ils donneront des rayons homologues passant par les extrémités d'un même diamètre quand les points de coupe de ceux-ci seront à la fois sur le cercle nouveau et sur la conique auxiliaire.

Les rayons  $a_1 m$  et  $am_1$  correspondant aux rayons cherchés  $Sm$  et  $Sm_1$ , sont à la fois des rayons homologues des faisceaux homographiques égaux qui engendrent le deuxième cercle, et des rayons homologues des faisceaux du  $(2 + 1)^e$  degré engendrant la conique. Il faut donc que leur point



d'intersection soit un point de coupe de ces deux courbes. En dehors de  $a$  ces courbes ont trois points de coupe dont deux peuvent être imaginaires. A ces trois points correspondent donc trois paires de points conjugués des divisions circulaires tels que les deux points d'une même paire sont sur un même diamètre. Ces points donnent à leur tour avec  $S$  les paires de rayons homologues rectangulaires des faisceaux concentriques en  $S$ .

*Les faisceaux homographiques concentriques du  $(2 + 1)^e$  degré ont donc trois paires de rayons rectangulaires conjugués dont deux peuvent être imaginaires.*

Constructivement on joint le point de coupe  $\mu_1$  des courbes avec  $a$  et  $a_1$ . On a  $a_1\mu_1$  et  $a\mu_1$ . La première droite donne  $\mu''$  sur la conique et  $m$  sur le premier cercle. La seconde droite donne  $m_1$  sur le même cercle;  $m$  et  $m_1$  sont conjugués dans les divisions circulaires et appartiennent à un même diamètre. Ils donnent évidemment  $Sm$  perpendiculaire à  $Sm_1$ . Le deuxième rayon conjugué de  $Sm$  soit de  $Sm_2$  se déduit de  $\mu''$  avec  $a\mu''$  (fig. 4).

Avec la deuxième méthode de construction, les paires de rayons rectangulaires conjugués étant liées à un diamètre du cercle primitif, nous pouvons voir que les extrémités d'un diamètre, jointes à  $S$  et  $P$  engendrent deux faisceaux homographiques de sommets  $S$  et  $P$  et forment un groupe du  $(2 + 1)^e$  degré. Le faisceau multiple a comme sommet  $S$  et le faisceau simple  $P$ . La courbe correspondante est une courbe du 3<sup>e</sup> degré avec  $S$  comme point double et  $P$  comme point simple. Cette courbe aura encore trois points de coupe différents de  $S$  et de  $P$  avec la conique. De chacun de ces points on pourra donc en déduire une paire de rayons homologues rectangulaires des faisceaux concentriques en  $S$ . On arrive donc à la même conclusion qu'avec la méthode précédente.

### 5. Points limites.

Nous appellerons points limites de deux divisions homographiques de même base et de la  $(2 + 1)^e$  classe les points conjugués du point à l'infini de la division simple ou le

point conjugué et le point lié du point de la division multiple situé à  $l'_\infty$ .

Pour obtenir ces points, considérons les divisions déterminées suivant la méthode de la figure 1. (Voir fig. 5).

Nous prenons  $Sl$  parallèle à la base. Le rayon  $a_1l$  donne  $\lambda'$  et  $\lambda''$ , sur la conique, auxquels correspondent  $a_1l_1$  et  $a_1l_2$ .

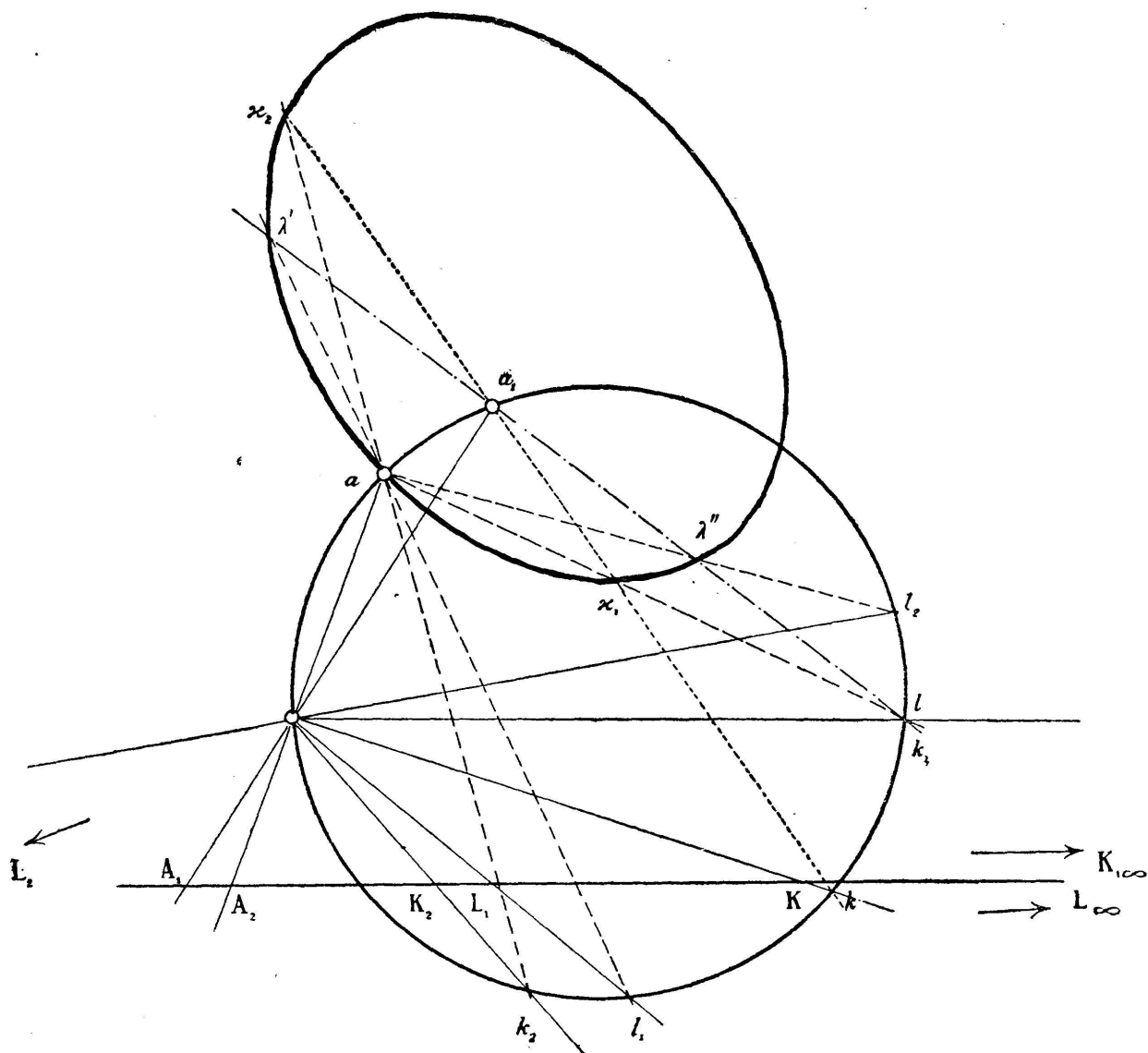


FIG. 5.

Les rayons  $Sl_1$  et  $Sl_2$  donnent  $L_1$  et  $L_2$  sur la base comme points conjugués de  $L_\infty$ .

$L_1$  et  $L_2$  forment un premier groupe de points limites. La parallèle précédente peut s'appeler  $Sk_1$ ; le rayon  $ak_1$  donne  $x_1$  sur la conique, puis  $a_1x_1$  donne  $x_2$ , sur la conique également et  $k$  sur le cercle; la droite  $ax_2$ , donne  $k_2$  sur le cercle.

Les rayons  $Sk$  et  $Sk_1$  puis  $Sk$  et  $k_2$  sont conjugués. Ils donnent sur la base :

$K$  conjugué de  $K_{1\infty}$

$K_2$  » de  $K$  et lié à  $K_{1\infty}$

$K$  et  $K_2$  forment le 2<sup>e</sup> groupe de points limites.

### C. Remarque sur les divisions du $(2 + 1)^{\text{e}}$ degré, de même base.

On peut cependant développer les divisions homographiques du  $(2 + 1)^{\text{e}}$  degré situées sur une même base, sans avoir besoin des faisceaux de même nature. Ce développement constitue la dualité du précédent et nous le résumons ici pour éviter d'allonger ce travail tout en voulant être aussi complet que possible. Chaque construction suppose évidemment une dualité.

*Première construction.* Nous donnerons les divisions au moyen des cinq paires d'éléments conjugués,  $aa_1$  ;  $aa_2$  ;  $bb_1$  ;  $cc_1$  et  $dd_1$  . Nous construirons ensuite un cercle quelconque tangent à la base  $xy$  , et par chaque point donné nous tracerons les tangentes de cercle. Toutes ces tangentes couperont d'abord la tangente  $b$  suivant une division double, puis la tangente conjuguée  $b_1$  suivant une division simple, homographique avec la première. Les tangentes issues de  $a_1 a_2 b_1 c_1 \dots$  coupent  $b$  et celles issues de  $abcd \dots$  coupent  $b_1$  . Ces deux nouvelles divisions ;  $\alpha, \beta, \gamma, \delta \dots$  et  $\alpha_1 \alpha_2 \beta_1 \gamma_1 \dots$  forment un groupe de  $(2 + 1)^{\text{e}}$  classe avec un point homologue commun  $\beta\beta_1$  . Elles engendrent donc une conique que nous pouvons construire et qui est déterminée par cinq tangentes. Par tout point  $\mu$  de  $b_1$  on a deux tangentes de la conique donnant les points homologues  $\mu_1$  et  $\mu_2$  sur  $b$  . Par ces trois points, les tangentes du cercle donneront les trois points homologues des deux divisions sur  $xy$  , soient  $m, m_1$  et  $m_2$  .

Les points doubles du deuxième degré seront évidemment donnés par les points de coupe de la base simple  $b_1$  avec la conique auxiliaire. Ils peuvent être imaginaires.



déduire les points des divisions sur  $xy$  au moyen des tangentes de cette conique. (Voir fig. 7).

Les points doubles du deuxième degré proviennent ici des points de coupe de  $\alpha\beta$  avec le cercle. Ceux du troisième degré sont donnés par les tangentes communes en dehors de

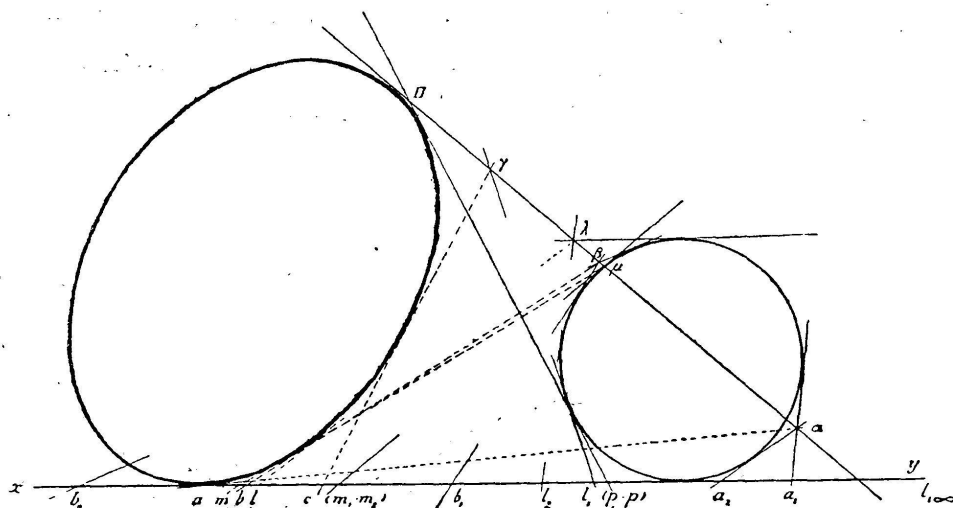


FIG. 7.

$xy$ . Toutes les coniques auxiliaires admettent quatre tangentes communes. Ce sont les trois sus-indiquées et la ligne  $\alpha\beta$ .

Les points triples et les points limites se trouvent d'une manière analogue à celle de la construction précédente.

## II

### TANGENTES ET SÉCANTES

Nous considérons une courbe du 3<sup>e</sup> degré donnée par un faisceau multiple  $S_2$  et un faisceau simple  $S_1$  constituant un groupe du  $(2 + 1)^e$  degré.

Pour construire la courbe nous nous reportons à ce que nous avons écrit précédemment (*Ens. math.*, 15 nov. 06). Les faisceaux sont donnés par cinq

Nous prenons également une courbe de la 3<sup>e</sup> classe formée par une division double et une division simple constituant ensemble un groupe de la  $(2 + 1)^e$  classe.

Pour construire cette courbe suivant la méthode que nous avons déjà exposée, nous considérerons les cinq paires de