Zeitschrift: L'Enseignement Mathématique

Band: 10 (1908)

Heft: 1: L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE

Artikel: CONSTRUCTIONS SYNTHÉTIQUES RELATIVES A CERTAINES COURBES DU 3e DEGRÉ ET DE LA 3e CLASSE

Kapitel: A. Construction de deux faisceaux concentriques du $(2 + 1)^e$ degré.

Autor: Crelier, L.

DOI: https://doi.org/10.5169/seals-10965

A. Construction de deux faisceaux concentriques du $(2 + 1)^e$ degré.

Les faisceaux sont donnés par les paires, Sa; Sa_1 — Sb; Sb_1 — Sc; Sc_1 — Sd; Sd_1 — Se; Se_1. Il reste bien entendu que chaque rayon a, b, c ... du faisceau simple correspond à 2 rayons a_1 et a_2 — b_1 et b_2 ... du faisceau multiple; par contre chaque rayon de celui-ci ne correspond qu'à un du premier. (Fig. 1.)

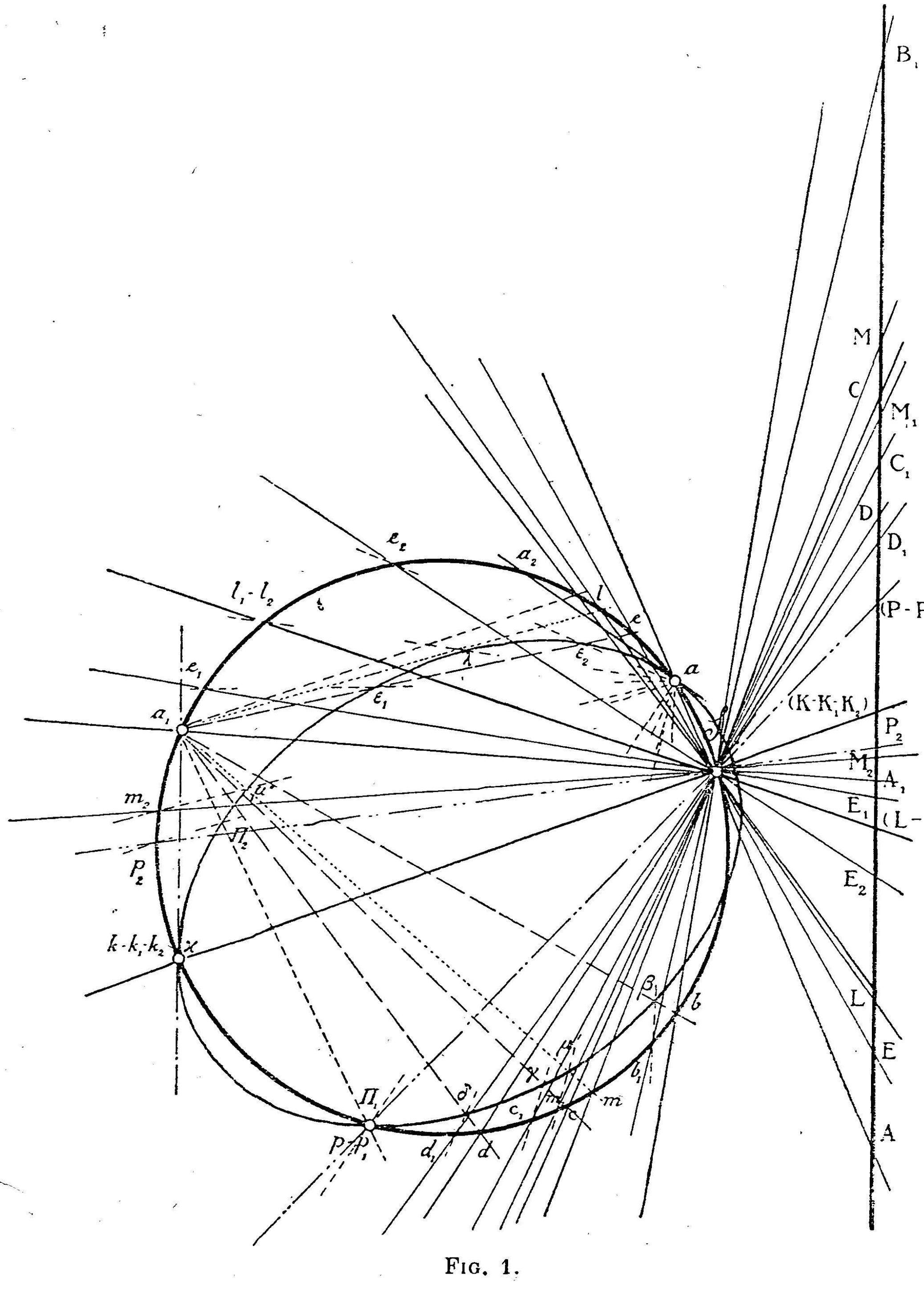

Fig. 1.

Nous coupons ensuite le groupe par une circonférence arbitraire mais passant par le sommet S. Les points de coupe des rayons avec la circonférence forment deux divisions circulaires homographiques du $(2+1)^e$ ordre. Celles-ci sont déterminées par les points: aa_1 — bb_1 — cc_1 — dd_1 et ee_1. Les points de la division simple sont: $abcde$ et ceux de l'autre sont: $a_1 b_1 c_1 d_1 e_1$. Nous joignons maintenant tous les points de la division multiple avec a et tous ceux de la division simple avec a_1. De cette manière, et dans le sens où nous avons défini les groupes du $(2+1)^e$ degré, nous obtenons deux faisceaux homographiques de sommet a et a_1 formant un groupe du $(2+1)^e$ degré, et possédant un rayon homologue commun aa_1. D'après notre théorème, le lieu de points de coupe des rayons homologues est une conique passant par les points :

1.	a sommet du faisceau multiple.					
2.	β point de coupe de		$a_1 b$	avec	ab_1 .
3.	γ »	»	$a_1 c$	»	ac_1 .
4.	δ »	»	$a_1 d$	»	ad_1 .
5.	ε_1 »	»	$a_1 e$	»	ae_1 .

Cette conique peut être entièrement construite au moyen de ces cinq points et elle nous permettra de déterminer tous les autres rayons du groupe de sommet S. Si nous voulons obtenir deux rayons conjugués quelconques Sm et Sm_1 ou Sm et Sm_2 nous menons par a_1 une transversale qui coupe la conique en μ' et μ''. Nous joignons $a\mu'$ et $a\mu''$ qui sont les homologues de la transversale dans les faisceaux auxiliaires de sommets a et a_1. Ces trois droites $a_1\mu'\mu''$ — $a\mu'$ — $a\mu''$ déterminent respectivement sur le cercle les points m, m_1 et m_2 constituant deux paires de points conjugués des divisions circulaires. Les rayons cherchés sont ainsi Sm, Sm_1 et Sm_2.

En faisant tourner la transversale autour de a_1 et en joignant les points de coupe sur la conique avec a nous obtenons ainsi tous les rayons des faisceaux de sommets a et a_1. Ceux-ci déterminent à leur tour tous les points des divisions circulaires et partant tous les rayons du groupe concentrique en S du $(2+1)^e$ degré.

Si nous considérons en particulier une des paires de rayons donnés, soit Se; Se_1 nous voyons qu'il existe un deuxième rayon Se_2 du faisceau multiple également conjugué de Se. Pour l'obtenir menons la droite $a_1\varepsilon_1$ qui donne encore ε_2, sur la courbe; $a\varepsilon_2$, donne e_2 sur le cercle et de celui-ci on déduit aisément Se_2. (Fig. 1.)

Si nous avions eu des divisions à déterminer au lieu de

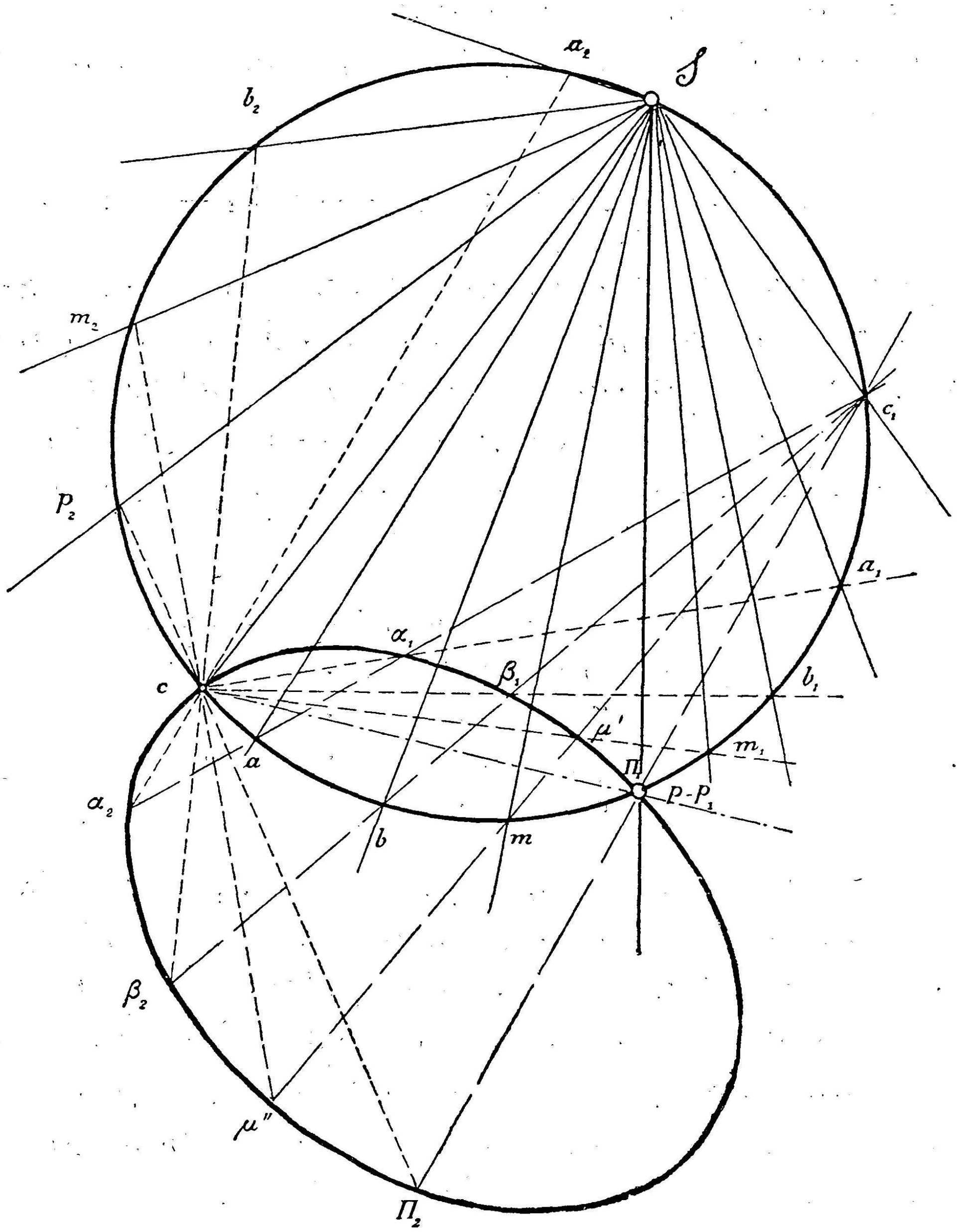

Fig. 2.

faisceaux, nous aurions joint les cinq paires de points homologues donnés AA_1 — BB_1 — CC_1 — DD_1 — EE_1 avec un point arbitraire S de manière à former un groupe de deux faisceaux comme les précédents. Nous aurions ensuite achevé la construction des rayons de ces faisceaux, comme il vient d'être dit, et chaque paire nouvelle de rayons homologues aurait donné la paire correspondante de points homologues sur la base commune. (Fig. 1.)

Cas spécial. Quand les rayons donnés des faisceaux du $(2+1)^e$ degré sont tels que deux paires du faisceau multiple sont complètes avec chacune leur rayon conjugué du faisceau simple, on peut également appliquer la construction précédente, ou utiliser une autre conique.

Si nous considérons la fig. 2, les paires de rayons homologues donnés sont :

$$\mathrm{S}a\ ;\ \mathrm{S}a_1 - \mathrm{S}a\ ;\ \mathrm{S}a_2 - \mathrm{S}b\ ;\ \mathrm{S}b_1 - \mathrm{S}b\ ;\ \mathrm{S}b_2 - \mathrm{S}c\ ;\ \mathrm{S}c_1\ .$$

Les paires $\mathrm{S}a_1$ et $\mathrm{S}a_2$ conjuguées à $\mathrm{S}a$, puis $\mathrm{S}b_1$ et $\mathrm{S}b_2$ conjuguées à $\mathrm{S}b$ sont complètes. On peut utiliser les points c et c_1 pris sur la circonférence comme sommets des faisceaux auxiliaires et former un groupe du $(2+1)^e$ degré. Ce groupe donne naissance à une conique dont nous avons également cinq points. Ce sont :

1. c sommet du faisceau multiple.
2. α_1 sur ca_1 et c_1a .
3. α_2 » ca_2 » c_1a .
4. β_1 » cb_1 » c_1b .
5 β_2 » cb_2 » c_1b .

Les paires de rayons conjugués $\mathrm{S}m\,\mathrm{S}m_1$ et $\mathrm{S}m\,\mathrm{S}m_2$ sont ensuite déterminées comme précédemment. (Fig. 2.)

Autre construction. Nous savons également que les rayons du faisceau multiple sont liés deux à deux et qu'ils forment une involution. Nous pouvons considérer le groupe du $(2+1)^e$ degré comme formé d'un faisceau simple, homographique avec une involution du 2^e degré et de même sommet. En coupant le groupe par un cercle passant par S, nous pouvons rappeler que les sécantes joignant les points correspondants de l'involution circulaire ainsi obtenue, forment un faisceau concentrique de sommet P. (Fig. 3.) Chaque rayon de ce faisceau correspond à un rayon du faisceau simple en S. Nous avons ainsi deux nouveaux faisceaux homographiques simples de sommets S et P qui engendrent une conique.

Les éléments donnés sont: $\mathrm{S}a$; $\mathrm{S}a_1 - \mathrm{S}a$; $\mathrm{S}a_2 - \mathrm{S}b$; $\mathrm{S}b_1$

— Sb ; Sb_2 — Se ; Se_1. Les transversales a_1a_2 et b_1b_2 donnent le point P.

Le rayon	Pa_1a_2	est conjugué de	Sa	et donne	α	de la conique	auxiliaire.
»	Pb_1b_2	»	Sb	»	β	»	»
»	Pc_1	»	Sc	»	γ	»	»

Les points P et S sont encore deux points de cette conique, laquelle est ainsi complètement déterminée.

En laissant une sécante mobile tourner autour de P, elle donnera sur la conique un point ν et sur la circonférence les

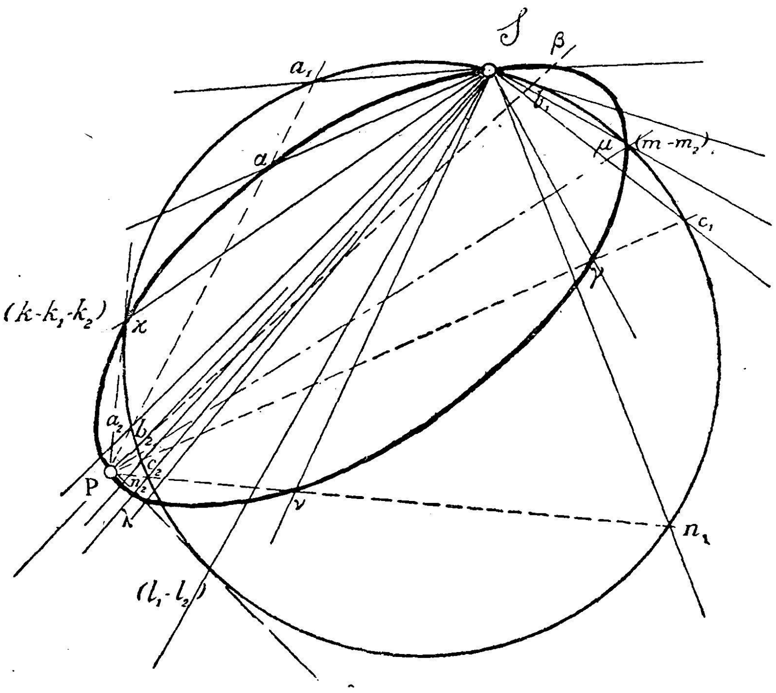

Fig. 3.

points n_1 et n_2. Au premier correspond le rayon Sn ou $S\nu$ et aux autres les rayons Sn_1 et Sn_2 tous deux conjugués du premier. Les diverses positions de cette sécante donneront ainsi toutes les paires de rayons homologues des deux faisceaux concentriques du $(2 + 1)^e$ degré. Cette construction relative à des données spéciales est également applicable aux divisions du $(2 + 1)^e$ degré situées sur une même base.

Remarque. Les points correspondants de la division multiple circulaire comme m_1 et m_2 ou e_1 et e_2 que nous avons déjà trouvés dans la première construction forment évidemment la même involution que dans la deuxième construction et comme pour ce dernier cas ils sont situés sur des transversales concourantes en un point P.

B. **Points et rayons particuliers.**

1. *Rayons doubles du 2e degré.*

Nous désignerons sous ce nom les rayons Sl_1 et Sl_2 du faisceau multiple qui tombent ensemble mais qui restent différents de leur conjugué l du faisceau simple.

1. *Points doubles du 2e degré.*

Nous entendons par points doubles du 2e degré deux points comme L_1 et L_2 de la division multiple, qui sont confondus mais qui restent différents de leur homologue L de la division simple.

Dans la fig. 1 ces rayons sont donnés par les tangentes de la conique auxiliaire issues de a_1. On joint le point de tangence λ avec a pour obtenir les points doubles correspondants de la division circulaire. Il reste à mener les rayons Sl_1 et Sl_2 issus de S par ce nouveau point. On a évidemment deux rayons de ce genre réels, imaginaires ou confondus. (Fig. 1.)

Dans la deuxième construction (fig. 3), ce sont les tangentes au cercle issues de P qui donnent les points doubles de la division circulaire. On joint ceux-ci à S et on a les rayons cherchés.

Quand il s'agit de points doubles du 2e degré pris sur deux divisions de même base, on prolonge les rayons doubles des faisceaux concentriques correspondants menés par S jusqu'à cette base.

2. *Rayons doubles du 3e degré.*

Nous appellerons rayons doubles du 3e degré deux rayons homologues confondus tels de Sp et Sp_1.

2. *Points doubles du 3e degré.*

Les points doubles du 3e degré sont les points formés par deux homologues P et P′ confondus.

Pour obtenir ces rayons, considérons dans la fig. 1, un des points de coupe de la conique avec le cercle et désignons le par π_1. La transversale $a_1\pi_1$ donne également deux rayons